



*Szolnoki Tudományos Közlemények XI.
Szolnok, 2007.*

Dr. MADARAS LÁSZLÓNÉ Dr.

AZ OPTIMALIZÁLÁS ELMÉLETÉNEK EGYIK MAGYAR „GYÖNGYSZEME”

Előadásukkal a 160 éve született Farkas Gyula (1847-1930) akadémikus, világhírű magyar elméleti fizika professzor matematikai munkásságát és annak jelentőségét elsősorban az optimalizálás-elméletben kimutatható jelentősége alapján kívánjuk méltatni.

A tudományban gyakran előfordul, hogy az adott kor, amelyben egy-egy kutató dolgozik még nem érett meg teljesen arra, hogy a kutatási eredményeket a jelentőségüknek megfelelően értékelje. Így a korábban megfogalmazott tételek később új megvilágításba kerülve más, esetenként sokkal nagyobb jelentőséget kaphatnak. Az operációkutatás mai szintjén Farkas Gyula 1901-ben publikált¹, a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tételének az optimalizálás-elmélet kialakulása után jóval nagyobb jelentőséget tulajdonítunk, mint ahogyan az életében megítélhető volt.

A 20. században a különféle vállalatok, intézmények mérete, bonyolultsága óriási mértékben megnövekedett. A bonyolultság és szakosodás növekedésével szükségessé vált a rendelkezésre álló erőforrások különböző tevékenységek közötti lehető leghatékonyabb szétosztása, s az egyes tevékenységek céljainak összehangolása a vállalat egészének céljaival. Így egyre gyakrabban került előtérbe a tudományos megközelítés alkalmazása a vállalatok, intézmények vezetésében. Azért, hogy minél objektívebb, megalapozottabb döntések születhessenek az egyre szerteágazóbb, összetettebb feladatok megoldására, kialakult az optimalizálás-elmélet. A különböző döntés-előkészítések kapcsán az adott probléma gazdasági modelljéből kiindulva, annak matematikai modelljét felállítva, az optimalizálási probléma számítógépes megoldása megadja a lehetséges optimális megoldást (megoldásokat).

A kialakuló új tudományterület, az operációkutatás a gyakorlati életben előforduló összetett rendszerek modellezésével, a korlátozottan rendelkezésre álló különböző erőforrások

¹ [3]

szétosztásával és az ezekhez kapcsolódó döntések meghozatalával foglalkozó elmélet. Célja tehát a vezetői döntéshozatal objektív megalapozása.

Az operációkutatás gyors fejlődését sokan a második világháborúhoz kötik, amikor különösen fontossá vált a katonai „erőforrásoknak” különféle hadi műveletek, másrészt e műveleteken belüli tevékenységek közötti hatékony szétosztása. Az ezen a területen folyt kutatási eredmények egyik fontos eredménye a lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló ún. szimplex módszer kidolgozása, amely George Dantzig (1947) nevéhez fűződik. Az operációkutatás gyors fejlődését az elektronikus digitális számítógépek létrejöttének (1946) is köszönhetjük. Az említett bonyolult problémák nagy mennyiségű számításai ugyanis csak az embernél ezerszer, esetenként akár milliószor gyorsabban elvégzett aritmetikai műveletek segítségével történhettek.

A nemlineáris programozás elnevezés Kuhn és Tucker 1950-ben publikált² cikkétől számítódik, melyben az optimalizálás szükséges feltételeit fogalmazták meg. Farkas Gyula 1901-ben megjelent homogén, lineáris egyenlőtlenségrendszerekre vonatkozó tétele 1950-ben, az optimalizálás-elmélet kialakulása révén³ került előtérbe. A lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó alapvető tételét ugyanis Kuhn és Tucker felhasználta a nemlineáris programozás alaptételének bizonyításában⁴. Így vált közismertté a bizonyításban felhasznált Farkas tétel.

Farkas Gyula főleg elméleti fizikai problémákkal foglalkozott, de a fizikai problémák matematikai háttérét olyan alaposan és mélyen kidolgozta, hogy közben klasszikus matematikai eredmények is születtek. A lineáris egyenlőtlenségek alaptételén túl az elméleti fizika keretein belül sikerült megfogalmaznia és bizonyítania a nemlineáris programozás legfontosabb alaptételét. Bár elméleti fizikai eredményt fogalmazott meg, tétele alkalmazható a nemlineáris programozásban egyenlőtlenséges feltételek melletti optimalizálásra is.

Ahhoz, hogy az elmélet fizika magyar megalapozójának ilyen tárgyú munkásságába betekintsünk, elért eredményit témánk szempontjából méltassuk, ’pillantsunk’ bele a fizikának abba a korszakába, amelyben Farkas Gyula alkotott.

Az 1970-es évektől az 1890-es évekig a fizikai fenomenológia korszakát éltük, míg a századfordulót a korpuszkuláris elméletek előtérbe-kerülése jellemezte.

Az elméleti fizika a 19. században az analitikai mechanika és a matematikai analízis módszereit alkalmazva jött létre. A mechanika, illetve égi mechanika mintájára a jelenségeket merev kapcsolatokra vagy távolba ható centrális erőkre igyekeztek visszavezetni. A 19. század második felében kezdték felismerni, hogy a fizika egyes jelenségcsoportjait nem lehet a pontmechanika által előírt szűk keretekben tárgyalni. Így a hőtan, fénytán, elektrodinamika területeit már az ún.

² [6]

³ Prékopa András így írja le a történetet: „Az 1976-ban Budapesten tartott IX. Nemzetközi Matematikai Programozási Szümpozion bankettjén a mellettem ülő Tucker elmondta, hogy amikor a nemlineáris programozás ún. szükséges optimalitási feltételének bizonyításán dolgozott, Kuhn-nal, akkori doktoranduszával együtt, megakadtak egy ponton, ahol szükségük volt a lineáris egyenlőtlenségrendszerekkel kapcsolatos eredményekre. Miután Tucker leküldte tanítványát a könyvtárba, hogy kutasson, hátha talál valamit, amire támaszkodva a bizonyítást teljessé tudják tenni, a tanítvány csakhamar ráakadt Farkas Gyula cikkére, melynek fő tétele pontosan azt mondja ki, amire szükségük volt.” In: [10], 16. oldal.

⁴ A nemzetközi matematikai irodalom egyik folyóiratában, a Crelle Journalban publikálta 1901-ben.

fizikai fenomenológiának⁵ nevezett iránynak megfelelően a tapasztalatra alapozva dolgozták ki. Hertz után az elektromágneses tér Maxwell-féle egyenletei adták az elektrodinamika alaptörvényeit.

A 90-es évektől rádióaktivitás jelenségeinek felfedezésével az atomi, korpuszkuláris felfogás kerül előtérbe, majd válik mindinkább uralkodóvá a fizikai fenomenológiával szemben. Majd a 20. század elejétől főként a relativitás elmélete, illetve a kvantumelmélet határozzák kutatások jellegét.

Farkas Gyula kutatásai a fizikai fenomenológia korszakában kezdődtek, annak egyik legkövetkezetesebb képviselője. Ebben a korszakban a fizika egyik legfontosabb célja a fizika alaptörvényeinek a közvetlenül adott tapasztalatra épülő precíz kidolgozása és a szükségtelen korlátozások nélküli általánosítás volt⁶. Ezért fordultak a szigorú és pontos matematikai alapok felé. Farkas Gyula első dolgozatai matematikai tárgyúak⁷. A kolozsvári egyetemre kerüléséig (1887) huszonöt matematikai tárgyú és négy fizikai témájú dolgozata jelent meg.

Miután a kolozsvári egyetem matematikai fizikai tanszékére került, érdeklődése is főként a fizika felé irányult. 1892-ben részt vett Paduában Galilei tanszékfoglalásának 300.-dik évfordulójának tiszteletére rendezett ünnepeken, amelyek kapcsán az analitikus mechanika

⁵ A fizikai fenomenológia a pozitivizmust képviseli. A pozitivizmus a tudományosság legfőbb kritériumának tapasztalatnak való közvetlen megfelelést, a biztos ismeretek megfogalmazását tartja. Nem tartották célszerűnek a közvetlen tapasztalaton túli, ún. 'túl messzemenő' következtetések levonását. A pozitivisták irányzat eredményeként a fizikai elméletek megalapozottabb fejlődése következett be, elvetve a hibásan létrejött, megalapozatlan ismeretek jó részét. A fizikai fenomenológia főbb képviselői Kirchoff, W. Voigt, P. Duhem, Mach, Robin, Poincaré, Planck.

⁶ W. Voigt a fizikai fenomenológia kimagasló képviselője elismeréssel nyilatkozott Farkas Gyula hidrodinamikában és termodinamikában megfogalmazott néhány eredményéről. (Kompendium der Theoretischen Physik, II. kötet, p.803)

⁷ Matematikai értekezései egy részét Villarceau és Hermite mutatták be a párizsi Académie des Sciences-ban. Ezek algebrai problémákra, mint lineáris egyenletrendszerek megoldására (Solution d'équations linéaires, présentée par M. Yvon Villarceau. C. R. LXXXVII. 1878. 523-526.), algebrai egyenletek képzetes gyökeinek meghatározására (Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Extrait d'une communiquée par M. Yvon Villarceau. C. R. LXXXVII. 1878. 791-794., Sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Extrait d'une communiquée par M. Yvon Villarceau. (Folytatás.) C. R. LXXXVII. 1878. 1027-1029., Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Extrait d'une lettre communiquée par M. Yvon Villarceau. (Folytatás.) C. R. LXXXVII. 1878. 273-275., (Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques (suite et fin). Extrait d'une lettre communiquée par M. Yvon Villarceau. C. R. LXXXVII. 1878. 565-567.) trinom egyenletekre (Auflösung der dreigliedrigen algebraischen Gleichung. Archiv der Mathematik und Physik. 64. Teil. Erstes Heft. IV. 1-8. Greifswald. 1879.) a gyökök sorfejtéssel való meghatározására (Vegyes m-edfokú egyenlet egyik gyökének meghatározása sorfejtés által 1-16. Budapest. Athenæum R. T. nyomdája 1878.) vonatkoznak. Majd áttér függvénytan problémákra. Több dolgozatában is foglalkozik az elliptikus függvényekkel (Sur une classe de deux fonctions doublement périodiques, présentée par M. Yvon Villarceau. C. R. XC. 1880. 1269-1271., Sur les fonctions elliptiques, présentée par M. Yvon Villarceau. C. R. XC. 1880. 1482-1484.), a magasabbrendű szinuszfüggvénnyel (~Sur l'application de la théorie de Sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations différentielles linéaires. Extrait d'une lettre adressée à M. Yvon Villarceau. C. R. XC. 1880. 1542-1545., Sur la théorie de Sinus des ordres supérieurs, communiquée par M. Yvon Villarceau. C. R. XC. 1880. 209-211., Sur la théorie de Sinus des ordres supérieurs, communiquée par M. Yvon Villarceau. C. R. XC. 1880. 278-281., Sur la théorie de Sinus des ordres supérieurs. Extrait d'une lettre à M. Yvon Villarceau. C. R. XC. 1880. 544-547.) és alkalmazásaival, elliptikus integrálok sorbafejtésével (Sur le développement des integrales elliptiques de première et de deuxième etc., présentée par M. Yvon Villarceau.) Jacobinak a Hamilton-féle kanonikus egyenletekre vonatkozó tételének általánosításával (Généralisation du théorème de JACOBI sur les équations de HAMILTON, présentée par M. Hermite. C. R. XCVI. 1883.) egyértékű függvényekkel (Sur les fonctions uniformes, communiquée par M. Yvon Villarceau. C. R. XCVI. 1883.) Egyik dolgozatában (A Bolyai-féle algoritmus. Értekezések a matematikai tudományok köréből, kiadja a M. Tud Akadémia. VIII. kötet III. szám. 1881. 1-8.) az általa Bolyai-féle algoritmusnak nevezett $x^m = a + bx$ egyenlet megoldására szolgáló iteráló eljárást teszi tanulmány tárgyává. Ugyancsak az iterálás a témája a 'Sur les fonctions iteratives' című, a Journal de Mathématiques-ban 1884-ben megjelent dolgozatának (Sur les fonctions itératives. Journal de Mathématiques. X. 1884. 101-108.), mely iterálás által nyerhető függvények analitikai karakterének megállapításával és az iterálási processzus konvergenciájával foglalkozik. Két geometriai tárgyú dolgozata közül az egyik Pascal-bigavonalával (PASCAL bigavonalának elemzése. Budapest. Athenæum R. T. nyomdája 1881. 1-23.), a másik egymásra lefejtethető felületekkel (Az egymásra teríthető felületek problémájáról. Erdélyi Múzeum-egylet Orvos-természett. Értesítője. Kolozsvárt. 1888? 260-265.) foglalkozik.

kezdte foglalkoztatni. A virtuális sebességek, a virtuális munka elvének tanulmányozásával⁸ olyan problémára talált, amelyre vonatkozó kutatásai tudományos munkásságának legeredményesebb részét képezik. Részletesen foglalkozott a mechanika Fouriertől eredő elvével, amely a kényszerfeltételek körében egyenlőtlenségeket is megenged. A Fourier-féle elv történetével, az elv előfeltételeivel, a használt fogalmak pontos kidolgozásával, az elv alkalmazhatóságával foglalkozik hét dolgozata⁹. A témához sorolhatjuk az elv matematikai megalapozását képező, a lineáris egyenlőtlenségrendszerre vonatkozó kutatási eredményeit¹⁰.

Farkas a lineáris egyenlőtlenségek elméletét fizikai kutatásainak megalapozása érdekében fejlesztette ki. Bizonyítja ezt a korábban említett 1901-ben németül publikált dolgozatának első két mondata. „Az analitikus mechanika természetes és szisztematikus tárgyalásának alapját az előbb FOURIER, és később GAUSS által megfogalmazott egyenlőtlenségi elvnek kell alkotnia.

Egy ilyen tárgyalás lehetősége azonban megkövetel bizonyos ismereteket a homogén, lineáris, egész egyenlőtlenségekkel kapcsolatban, melyek eddig úgyszólván teljesen hiányoztak.”¹¹ Ha a virtuális elmozdulás komponenseit, mint a kényszerfeltételek által megengedett δx_i , δy_i , δz_i és valóságos dx_i , dy_i , dz_i elmozdulások különbségeiként definiáljuk $\delta x_i = \dot{x}_i - dx_i, \dots$ úgy a Fourier-féle elvet a következő egyenlőtlenség adja:

$$\sum_i \left\{ \left(m_i \ddot{x}_i - X_i \right) \delta x_i + \left(m_i \ddot{y}_i - Y_i \right) \delta y_i + \left(m_i \ddot{z}_i - Z_i \right) \delta z_i \right\} \geq 0, \quad (1) \text{ ahol } m_i \text{ az } i\text{-edik pont}$$

tömege, \ddot{x}_i , \ddot{y}_i , \ddot{z}_i a gyorsulás komponensei. X_i , Y_i , Z_i a szabad erő komponensei. Azaz a virtuális elmozdulásnál a kényszererők munkája nem lehet negatív. A kényszer általában lineáris relációk fejezik ki. Az egyenlőségek és egyenlőtlenségek a virtuális elmozdulások komponensei

között a következő alakúak: $\sum_{i=1}^n (A_{ik} \delta x_i + B_{ik} \delta y_i + C_{ik} \delta z_i) = 0$, ahol $k = 1, \dots, j$, $j \leq 3n$,

⋮

$\sum_{i=1}^n (L_{ik} \delta x_i + M_{ik} \delta y_i + N_{ik} \delta z_i) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, (2) ahol az együtthatók a koordináták és az idő

differentiálható függvényei, melyek számára a diszkrét folytonosság szakadási helyeket enged meg. A kényszer független egyenleteinek a száma azonban nem lehet nagyobb, mint a változók száma. Farkas Gyula bebizonyította, hogy ha a független egyenlőtlenségek számának nincs felső

⁸ A virtuális sebességek elve GALILEINÉL. Matematikai és Physikai Lapok. 1893. 78-95., GALILEI-ről s a páduai GALILEI ünnepléséről. U. o. 1893. 78-95.

⁹ A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai. M. T. É. XII. 459-472., A Fourier-féle mechanikai elv története és némely speciális alkalmazásai. Erdélyi Múzeumegylet Értesítője. 1895. 43-54 és 13-32., A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapjáról. Matematikai és Physikai Lapok 1896. 49-54., A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapja. M. T. É. XVI. 1898. 361-364., Parameteres módszer FOURIER ~ mechanikai elvéhez. Matematikai és Physikai Lapok 1898. 63-71., Általános mechanikai elvek aether számára. M.T. É. XIX. 1901. Ugyanaz az Archiv Neerlandaises Livre jubilaire dédié à H. A. LORENTZ-ben., Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik. Crelle Journal. 131, 1906. 165-201.

¹⁰ 9 dolgozat tartozik ide. A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapjáról. Matematikai és Physikai Lapok 1896. 49-54., A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapja. M. T. É. XVI. 1898. 361-364. Vektor-tan és az egyszerű inaequatiók tana. Különlenyomat az Erdélyi Múzeumegylet Értesítője után. Kolozsvárt. 1900. I-XIV. és 1-165., Theorie der einfachen Ungleichungen. Crelle Journal. 124, 1902. 1-27. Multiplikatoros módszer négyzetes alakhoz. M. T. É. XXXV. 1917. 51-53. Nem-vonalas egyenlőtlenségek vonalassá tétele. M. T.É. XXXV. 1917. 41-50., Egyenlőtlenségek alkalmazásának új módja. M. T. É. XXXVI. 1918. 297-308., A lineáris egyenlőtlenségek következményei. M. T. É. XXXVI. 1918. 397-408., Alapvetés az egyszerű egyenlőtlenségek vektorelméletéhez. M. T. É. XLIII 1926. 1-3.

¹¹ In: [8] 166. oldal

határa, ha a változók száma nagyobb, mint kettő. Független egyenlőtlenségeknek a változók számára újabb korlátozást jelentő egyenlőtlenségeket értjük.

Ha $\theta_i \equiv A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n$ és (3) $\theta_i' \equiv A_{i1}'x_1 + A_{i2}'x_2 + \dots + A_{in}'x_n$ az x_1, \dots, x_n n változó lineáris formája és a változóknak minden $\theta_i = 0, i = 1, \dots, k \leq n., \theta_i' \geq 0, i = 1, \dots$ (4) lineáris relációrendszer kielégítő értékénél fennáll a $\mathcal{G} \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq 0$ (5) lineáris homogén reláció, úgy azt mondjuk, hogy (5) reláció a (4) relációrendszer következménye.

Ezen esetben mindig található olyan λ multiplikátorok és λ' nem negatív multiplikátorok, hogy $\mathcal{G} \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots + \lambda_1'\theta_1' + \lambda_2'\theta_2' + \dots$.

Azt is kimutatta, egy lineáris relációrendszer kielégítő változókra, hogy ezek előállíthatók részint mint tetszés szerinti v_i , részint mint nem-negatív w_i paraméterek lineáris kifejezései:

Farkas Gyula 1901-ben publikált dolgozatát az operációkutatással foglalkozók elsősorban a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tétele miatt emelik ki. Az általa vizsgált fizikai probléma legfontosabb speciális esete a nemlineáris programozás alábbi problémájával azonosítható.

Legyenek $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m, \underline{g}$ m -komponensű vektorok és tekintsük az alábbi homogén lineáris egyenlőtlenségeket: $\underline{g}_i^T \underline{x} \geq 0, i = 1, \dots, M,$ (1)

$$\underline{g}^T \cdot \underline{x} \geq 0. \quad (2)$$

A (2) egyenlőtlenséget az (1) következményének mondjuk, ha fennáll minden olyan \underline{x} esetére, amelyre az (1) egyenlőtlenségek fennállnak.

Farkas tétele a következő:

Tétel: A (2) egyenlőtlenség akkor és csak akkor következménye az (1) egyenlőtlenségeknek, ha léteznek olyan nemnegatív $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ számok, hogy fennáll a $\underline{g} = \lambda_1 \underline{g}_1 + \dots + \lambda_M \underline{g}_M$ egyenlőség. (3)

A tételt Farkas Gyula általánosabban is kimondta, az (1) relációk egy részére egyenlőséget megkövetelve. Az állítása ekkor csak annyiban módosul, hogy az egyenlőséges feltételeknek megfelelő λ_i számoktól nem követeljük meg a nemnegativitást, de a (3) egyenlőséget változatlanul állítjuk. A tétel bizonyítását Farkas a teljes indukció elve alapján végezte el. Azóta másfajta bizonyításokat is publikáltak. Közülük talán a legegyszerűbb a lineáris programozás dualitás elvére alapozó bizonyítás¹², amely azonban feltételezi a lineáris programozás elméletének, ezen belül a dualitás tételének az ismeretét, amit Farkas még nyilván nem ismerhetett. Farkas tétele egyébként ekvivalens a dualitás tétellel¹³.

Fontos még megemlíteni, hogy Farkas Gyula 1901-ben publikált dolgozata tartalmaz még egy algoritmikus eljárást is a $G\underline{x} \geq 0$ feltételnek eleget tevő \underline{x} vektorok $\underline{x} = H\underline{w}, \underline{w} \geq 0$ alakban való előállítására.

¹² Prékopa, A., „A brief introduction to linear programming”, Mathematical Scientist 21 (1996) 85-11.

¹³ [9]

Egy, a Farkas-tétellel ekvivalens tételt Minkowski is bebizonyított¹⁴. Farkas tételének azonban nagyobb lett a hatása, mert a lineáris egyenlőtlenségek elméletét alkalmazási céllal, egy konkrét fizikai probléma megoldására dolgozta ki.

Így született meg a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tétel, amely Farkas-lemma néven az egyik legnagyobb magyar matematikai eredmény.

Ma már nemzetközi szinten is elismert, hogy Farkas Gyulát a modern optimalizálás-elmélet egyik megalkotójának tekinthetjük.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Farkas, Gy., „A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai”, *Mathematikai és Természettudományi értesítő* 12 (1984) 457-472.
2. Farkas, Gy., „A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapjáról”, *Mathematikai és Fizikai Lapok* 5 (1896) 49-54.
3. Farkas, Gy., „A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapja”, *Mathematikai és Természettudományi értesítő* 16 (1899) 361-364.
4. Farkas, J., „Theorie der einfachen Ungleichungen”, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 124 (1901) 1-27.
5. Farkas, Gy., „Egyenlőtlenségek alkalmazásának új módjai”, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 36 (1918) 297-308.
6. Farkas, Gy., „A lineáris egyenlőtlenségek következményei”, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* 36 (1918) 397-408.
7. Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., *Nonlinear Programming*, in: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press, Berkeley, California, 1950.
8. Ortvy, R., „Farkas Gyula tudományos működése”, *Matematikai és Fizikai Lapok* 34 (1927) 5-25.
9. Prékopa, A., „Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről” *Alkalmazott Matematikai Lapok* 4 (1978) 166. oldal.
10. Prékopa, A., „Lineáris Programozás I. Bolyai János Matematikai Társulat”, Budapest, 1968.
11. Prékopa, A., „Farkas Gyula élete és munkásságának jelentősége az optimalizálás elméletében”, In: *Új utak a magyar operációkutatásban, In memoriam Farkas Gyula*. Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, (1999) 15-31.
12. Szénássy, B., „A Magyarországi Matematika Története”, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

¹⁴ Minkowsky, H., *Geometrie der Zahlen* Teubner, Leipzig und Berlin, 1896.