Szolnoki Tudományos Közlemények XI.
Szolnok, 2007.

Prof. Dr. POKORÁDI LÁSZLÓ

A MATEMATIKAI MODELL

Már több mint 20 éve foglalkozom különféle üzemeltetési és technikai rendszerek, folyamatok matematikai modellezésével és modellvizsgálatával. De, erről lényegében csak a ***„matematikai modell”*** kifejezésig tudok beszélni (sajnos, néha meg a mérnökök körében is), mert ekkor valami elvont, egy „normális” ember számára érthetetlen dologra asszociálnak, meg sem gondolva, hogy ez nem is olyan bonyolult. Ezen tapasztalat adta az ötletet, hogy most megkíséreljem itt, ***A tudomány iskolájában*** közérthetően megválaszolni, hogy Mi is az a matematikai modell? Jelen cikkemben és az előadásom során nem a precíz matematikai megfogalmazásokat, definíciókat, hanem a közérthetőségre törekszem.

A modellek közül napjaink mérnöki gyakorlatában leggyakrabban alkalmazott a matematikai modell. Ennek fő oka a számítástechnika robbanásszerű elterjedése.

A matematikai modell valamilyen vizsgált rendszerben lejátszódó jelenség, folyamat vagy tevékenység a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságai közötti összefüggések matematikai megfogalmazása [7]. A matematikai modell egyrészt nem definiált (absztrakt, szimbolikus) matematikai objektumokból (például számokból, vektorokból) áll, másrészt az objektumok közötti relációkból [5]. A matematikai modell a matematika szimbólumrendszerén keresztül teremt kapcsolatot a vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői között [9].

A matematikai reláció olyan összefüggés, amely két vagy több nem definiált objektumot kapcsol össze. Sok reláció matematikai műveletekkel kapcsol össze egy vagy több objektumot egy másik objektummal vagy objektumok egy halmazával. A matematikai modell akkor írja le jól az adott fizikai szituáció megfelelően választott vonásait, ha alkalmas megfeleltetés létesíthető a vizsgált fizikai objektumok és a matematikai modellhez tartozó matematikai objektumok között, valamint a fizikai objektumok közötti kapcsolatok és a matematikai modellben definiált relációk között.

A matematikai formulák ismert, valamint ismeretlen mennyiségeket tartalmaznak, és a feladat határozottsága esetén az ismeretlen kimenő jellemzők meghatározhatók az ismert bemenő és belső jellemzők birtokában. A feladat határozatlan, ha az ismeretlen, kimenő jellemzők száma több mint a folyamatot leíró matematikai egyenletek száma. Ekkor a függő változók vektora becsülhető, vagy bármelyik kimeneti paraméter csak a többi függvényeként fejezhető ki. A feladat túlhatározott, ha az output jellemzők számánál több, egymástól lineárisan független matematikai egyenlet írható fel. A matematikai modell kellően definiált kezdő és peremfeltételekkel együtt egyben az adott jelenség algoritmusát is szolgáltathatja.

A homológ és analóg modellalkotás legtöbbször nem közvetlenül, hanem a matematikai modellen keresztül történik. Ezek az úgynevezett másodlagos leképezések. Jellemzőjük, hogy a jelenség lényegét tükröző absztrahált modellhez először a matematikai modellt alkotjuk meg. Ezután — felhasználva a hasonlóságelmélet azon törvényszerűségét, hogy a hasonló jelenségeket leíró matematikai összefüggések formálisan azonosak vagy azonos alakra transzformálhatók — létrehozzuk a matematikai modellnek megfelelő, az eredeti jelenséggel homológ vagy analóg modellt. Az ily módon másodlagos jellegű, a leíró matematikai formulát leképező analóg modell már semmilyen szemléletes kapcsolatban nem áll az eredeti jelenséggel, csak a be- és kimenő jellemzők közti kapcsolatot adja vissza.

A MATEMATIKAI MODELLEK CSOPORTOSÍTÁSA

A rendszer viselkedését leíró matematikai összefüggések jellege, vagy meghatározásának módszere szerint — páronként — az alábbi matematikai modelleket különböztetjük meg [6]; [9] és [13]. A bemutatásra kerülő felsorolás természetesen nem teljes, mivel egy konkrét, gyakorlatban megvalósított matematikai modell általában az alábbi jellegek szintézisét jelenti.

A bemutatásra kerülő párosításokon túl, a matematikai modelleket szokás a bemeneti és kimeneti változóik száma szerint is csoportosítani. Ezek alapján az 1. Táblázatban szereplő modelleket különböztetünk meg.

Modell típus	**Felhasznált matematikai egyenlet**
egybemenetű — egykimenetű (Single Input Single Output — SISO)	Skalár—skalár
egybemenetű — többkimenetű (Single Input Multi Output — SIMO)	Vektor—skalár
több-bemenetű — egykimenetű (Multi Input Single Output — MISO)	Skalár—vektor
több-bemenetű — többkimenetű (Multi Input Multi Output — MIMO)	Vektor—vektor

1. Táblázat Modellek osztályozása a be- és kimenő jellemzők számai alapján

Az utóbbi három modell esetében a leíró egyenletek formailag vektor, illetve mátrix formalizmussal kezelhetők.

Fontos megjegyezni, hogy a matematika modellek és a rendszerek osztályai megnevezésükben gyakran egyeznek. Bizonyos szakirodalmak (például [15]) már magán a rendszer fogalmán is lényegében nem is a valós technikai rendszert, hanem annak matematikai modelljét értik.

Egy adott rendszer tulajdonságai meghatározhatják, de nem determinálják egyértelműen, hogy milyen matematikai modellel írható le a benne lejátszódó folyamat. Például egy nem lineáris rendszert közelítő elemzés során lineáris matematikai modellel, vagy diszkrét paraméterű rendszert folytonos paraméterű modellel is leírhatunk.

STATIKUS ÉS DINAMIKUS MODELLEK

A **statikus modell** egy időben nem változó állapotot ír le. Matematikailag megfogalmazva, ilyenkor rendszer állapotát algebrai egyenletekkel, vagy idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó differenciálegyenletekkel írható le. Jellemzésére elterjedt még a stacionárius (vagy stacioner), állandósult, illetve egyensúlyi modell kifejezés is.

A **dinamikus modell**ek a vizsgált rendszer, folyamat jellemzőinek időbeni változását írják le. Megjelenési formájuk közönséges vagy parciális differenciálegyenlet, vagy egyenletrendszer. Lehetséges, hogy a tárgyalás nem az idő-, hanem valamely célszerűen megválasztott transzformált tartományában valósul meg.

Példaképpen nézzünk egy gyártósort. Ha a teljes soron lejátszódó folyamatot elemezzük, amikor a termelés már beállt, akkor ezt egy stacioner modell segítségével tudjuk megtenni. De, ha ezen a gyártósoron végig haladó egy munkadarabot vizsgálunk, ahogyan az végighalad a különböző technológiai helyeken, akkor egy instacioner modellt kell felállítanunk.

A helikopter forgószárnyak működésének modellezése során a lapátok változó aerodinamikai helyzetének elemzése — a forgószárny-tengely körülfordulása során változó — úgynevezett azimut szög függvényében történik, mely így az idő — a tengely forgási szögsebessége alapján — transzformált időtartománynak tekinthető.

LINEÁRIS ÉS NEMLINEÁRIS MODELLEK

A **lineáris modell**ekben csak a változók és deriváltjaik szerepelhetnek, általában állandó együtthatókkal szorozva. Egy matematikai modell akkor, és csak akkor lineáris, ha a folyamatot leíró egyenletrendszer kielégíti a szuperpozíció elvét. A szuperpozíció elvéből következik, hogy lineáris matematikai modellek alakjai csak a homogén, lineáris egyenlet, illetve egyenletrendszer lehet.

A **nemlineáris modell**ek az előző kötöttségektől mentesek. Az adott rendszerben lejátszódó folyamatot leíró egyenletek legalább egyike nemlineáris, azaz valamilyen hatvány-, szög-, vagy egyéb más függvényt is tartalmaz.

A nemlineáris modellek — az egyszerűbb vizsgálat érdekében — valamilyen linearizálási módon alakíthatók át lineáris modellekké.

A matematikai modellvizsgálatok kezdetén — a korlátozott numerikus számítási lehetőségek miatt általában — csak lineáris modellek felállításával és alkalmazásával foglalkoztak a szakemberek. Fontos azonban tudnunk, hogy a linearizálással nyert lineáris modellek csak viszonylag szűk paramétertartományban alkalmazhatóak megfelelő pontossággal. Napjainkban a számítási módszereket és főleg a számítógépes lehetőségeket kihasználva egyre jobban terjednek el a nemlineáris matematikai modellek. Ez viszont magával vonja, hogy a modellezések során megjelennek különféle kaotikus jelenségek is.

DETERMINISZTIKUS ÉS SZTOCHASZTIKUS MODELLEK

A **determinisztikus modell**ekben szereplő jellemzők, valamint maguk a változók egyértelmű függvényekkel térben és időben egyaránt megadhatók.

A **sztochasztikus modell**ek ugyanezen jellemzői és/vagy változói csak bizonyos valószínűségi összefüggések télhasználásával határozhatók meg.

Egy egyszerű példának vegyünk egy dobókockát. Ha az eldobása utáni röppályáját vizsgáljuk, akkor determinisztikus modellt kell alkalmaznunk. Ha viszont azt elemezzük, hogy milyen számmal felfelé esik le, akkor sztochasztikus modellt kell választanunk vizsgálatunkhoz.

A valóságos technikai folyamatok lényegében mindegyike sztochasztikusnak tekinthető, az adott rendszer bemenetei, és belső paraméterei bizonytalanságainak következtében. Ezért a determinisztikus modellek alkalmazásával a kimenő jellemzőknek „csak" várható értékei határozhatóak meg. A fenti egyszerű példát is, ha „közelebbről megnézzünk", kijelenthetjük, hogy a dobókocka röppályájának meghatározási is sztochasztikus modellel írható le. Mert például, nem tudjuk, hogy az adott kocka tömege (mint belső paraméter) milyen mértékben tér el a névleges értékétől, illetve, hogy — a meteorológiai jelenségek következtében pontosan milyen a levegő sűrűsége (mint bemeneti paraméter), így a légellenállás nagysága is véletlenszerűen változik.

FOLYTONOS IDEJŰ ÉS DISZKRÉT IDEJŰ MODELLEK

A **folytonos idejű modell**ek esetén a modellezett rendszert vagy folyamatot leíró jellemzők, független és függő változók a vizsgált idő alatt bármelyik pillanatban vehetnek fel valamilyen értéket. Azaz a folytonos idejű modellek bemeneti-, és kimeneti jelei egyaránt folytonos idejű, FI jelek.

Diszkrét idejű modell esetében a jellemzők csak adott, konkrét időpillanatokban vehetnek fel értékeket. Más megfogalmazásban, a diszkrétidejű modell független és függő változói diszkrét idejű, DI jelek lehetnek.

A matematikai modellek folytonos vagy diszkrét idejű jellegét csak a dinamikus (instacioner) modellek esetén kell vizsgálnunk, mivel a stacioner modellben a paraméterek nem változnak az idő vagy annak valamilyen transzformált paramétere függvényében. Ha a modellezet folyamatot egy időben folytonos egyenlettel vagy egyenletrendszerrel írunk le, akkor az egy folytonos idejű modellt jelent. De a modell alkalmazásakor általánosan azt bizonyos időléptetéssel fogjuk megoldani, azaz az eredeti folytonos idejű modellt diszkrét idejűvé alakítjuk át. Például, ha a modell egy időszerinti differenciálegyenlet, akkor azt átalakítjuk differencia egyenletté.

FOLYTONOS PARAMÉTERŰ ÉS DISZKRÉT PARAMÉTERŰ MODELLEK

A **folytonos paraméterű** (vagy folytonos állapotterű) **modell**ekben a változók egy adott tartományon, értékhatáron belül bármilyen értéket felvehetnek, azaz folytonos paraméterű jelek.

Diszkrét paraméterű (vagy diszkrét állapotterű) **modell**ek esetén a változók csak meghatározott diszkrét értékeket vehetnek fel. Azaz a diszkrét paraméterű modellek inputjai és outputjai egyaránt diszkrét paraméterű jelek.

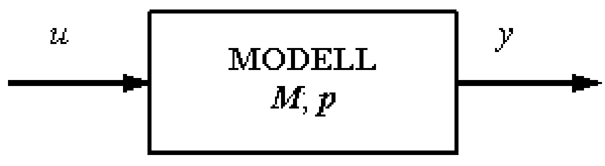
A lottószámokat adott időben húzzák és azok csak konkrét, egész számok lehetnek. Ezért a lottóhúzást egy diszkrét idejű, diszkrét állapotterű, sztochasztikus modellel tudjuk matematikailag leírni és vizsgálni.

Életünk során — sajnos — folyamatosan öregszünk, azaz matematikailag megfogalmazva: életünk egy folytonos idejű folyamat. De mivel életkorunkat években mondjuk meg, így az csak diszkrét értékeket vehet fel. Ez példa arra, hogy egy folytonos paraméterű (esetleg idejű) folyamatot diszkrét paraméterűként (vagy idejűként) is vizsgálhatunk.

MODELLEZÉS ÉS SZIMULÁCIÓ

A matematikai modellek alkotási eljárásokról és alkalmazásáról kiterjedt szakirodalom található. Ezek közül jelen tanulmányban a [6]; [8]; [9]; [10] és a [13] irodalmakban található információk és vélemények összegzése olvasható.

A matematikai modellalkotás lényegében az adott rendszert, illetve a benne lejátszódó folyamatot leíró egyenletek, a kezdeti- és peremfeltételeket, valamint a kapcsolódó adatrendszer felállítását, illetve a megoldó algoritmust jelenti. Azért kell ide sorolnunk a megoldó algoritmust is, mert az meghatározza a megoldás pontosságát, így a modell alkalmazhatóságát is. A természettudományi, műszaki problémák kezelésénél ezek az összefüggések általában differenciálegyenletek. Amennyiben a vizsgált rendszer vagy folyamat időbeli változásának leírása a térbeli eloszlási probléma megoldásával is kiegészül, akkor természetesen parciális differenciálegyenletet vagy egyenletrendszert kell felírnunk és megoldanunk.



1. ábra Mérnöki probléma matematikai modelljének egyszerűsített sémája

Egy mérnöki probléma matematikai modelljének egyszerűsített sémája látható a 1. ábrán. Az ábra alapján a modellalkotási feladat lényegében az alábbi három fő mozzanatból áll:

- a modell $\boldsymbol{M}$ szerkezetének megadása;
- a modell $\boldsymbol{p}$ paramétereinek megadása;
- a modell validálása.

A szimuláció egy adott probléma megoldására felállított matematikai modell felhasználása a vizsgált jelenség vagy rendszer — a vizsgálat szempontjából — minél teljesebb mértékű megismerése érdekében. A szimuláció során az adott rendszer bemenetén megjelenő változók (a gerjesztések és a zavarások), valamint a rendszert jellemző úgynevezett belső paraméterek (például geometriai és/vagy anyagjellemzők) a rendszer kimenő paramétereire gyakorolt hatásait elemezhetjük. Mindezekhez először is szükségünk van az adott problémát — a megkívánt mérnöki pontossággal — leíró modell felállítására és ellenőrzésére. A szimulációs eredmények pontosságát nagymértékben az alkalmazott modell szabja meg. A matematikai modell kimenő paramétereinek tulajdonságai alapján megkülönböztethetünk analitikus és digitális szimulációt.

Egy rendszer matematikai modelljének megalkotásához alapvetően két szélsőséges elméleti módszer kínálkozik:

white-box eljárás

Ebben az esetben a modell felállítása alapvetően a rendszerről vagy folyamatról kapott előzetes információk alapján, fizikai megfontolásokra, törvényszerűségekre támaszkodva történik az analitikus formájú, közvetlen matematikai modell előállítása.

A módszer előnye, hogy a modell fizikai paramétereinek valós tartalma, jelentése van, hátránya viszont, hogy a modell felépítése általában rendkívül bonyolult. Többnyire tervezési, a rendszerről történő részletes információszerzési igény kielégítése esetén alkalmazzuk, azaz a mérnöki gyakorlatban ez fordul elő leggyakrabban.

black-box eljárás

Ez a másik szélsőséges elméleti — megfigyelési, illetve kísérleti — módszer. Ekkor a modell felállításához csak kísérletekkel, mérésekkel lehet információkat szerezni. Lehetséges megfigyelési kísérlet lehet ebben az esetben a vizsgálójelekre adott rendszerválaszok (például az átmeneti függvény) elemzése. Ha nincs más alapinformáció, akkor kiindulásként , mint matematikai modell, például polinommal történő közelítést biztosító egyenleteket lehet felhasználni.

Az black-box modellek lényeges előnye a viszonylagos egyszerűségük. Viszont egyértelműen az a hátrányuk, hogy a paramétereknek, adott esetben, nincs valós fizikai jelentése. Bizonyos esetekben, az egyszerűségből fakadóan ezek a modellek is nagyon jól alkalmazhatók. Mivel az ilyen a modelleket a vizsgált rendszer kimeneti és bemeneti jellemzői alapján állítjuk elő, egyes idegen nyelvű szakirodalmak Input/Output (I/O) modelleknek is nevezik.

A két fenti, elvi szélsőségeket jelentő eljárás „között" található az úgynevezett vegyes modell alkalmazása.

grey-box eljárás

Ez a megközelítési eljárás lényegében az előző két módszer kombinációja. A valóságos a műszaki gyakorlatban legtöbbször ez az eset fordul elő. Mivel egy mérnöki probléma megoldása sorár nem kell teljes egészében „a sötétben tapogatóznunk”, mindig vannak kapaszkodók, ugyanakkor vannak nem ismert „sötét foltok” is.

Az alkalmazott modell milyenségét, annak pontosságát mindig az adott felhasználási cél dönti el. Így a vizsgálat során a modell létrehozásának egyik legfontosabb eleme a modellképzés céljának meghatározása. A modellalkotás célja szerint a műszaki gyakorlatban lehet:

- tudományos;
- fejlesztési;
- rutin mérnöki tevékenységet segítő.

A különböző célú modelleket elsősorban a modell pontossága, illetve a modell pontosságának — azaz a modell hibájának és bizonytalanságának — ellenőrzése szempontjából különböztethetjük meg egymástól.

Egy **tudományos modell** egy szűkebb jelenség vizsgálatából általánosít. Így a hibás modell későbbiekben hibás következtetéseket vonhat maga után, amit a tapasztalat már nem igazol. Ezért a tudományos modellek megalkotásánál különösen fontos, hogy:

- a modell jól és egyértelműen meghatározott hibáját közölni kell, amit a modell tapasztalati, kísérleti ellenőrzésével kell megadni;
- a modell alkalmazhatósági határait meg kell határozni és azt közölni kell.

A **fejlesztési**, tervezési célú **modell**ezés során a modellalkotás pontosságát igazítani kell az adott feladathoz. Minden ilyen esetben, még egy új berendezés megalkotásánál is, valamilyen előzményekre építhet a modell felállító és alkalmazó mérnök. Az első feladat ezért mindig az, hogy megismerjük a tudományos és a szakmai előzményeket.

A **rutin mérnöki tevékenységet segítő modell**ezés a modellalkotás „legveszélyesebb” területe. Ugyanis sokszor a mérnök egy akár „szokványos” számítás elvégzése során nem is gondol arra, hogy ez a számítás valamilyen modellalkotás eredménye. Pedig ez alapvető kérdés! Az ugyanis, hogy milyen modellből — azaz milyen szakmai megfontolás, fizikai törvényszerűségek alapján — származik az adott számítási módszer, és hogy az adott modell az adott esetben kielégítő-e, valamint az, hogy hol vannak a modell alkalmazhatóságának határai?!

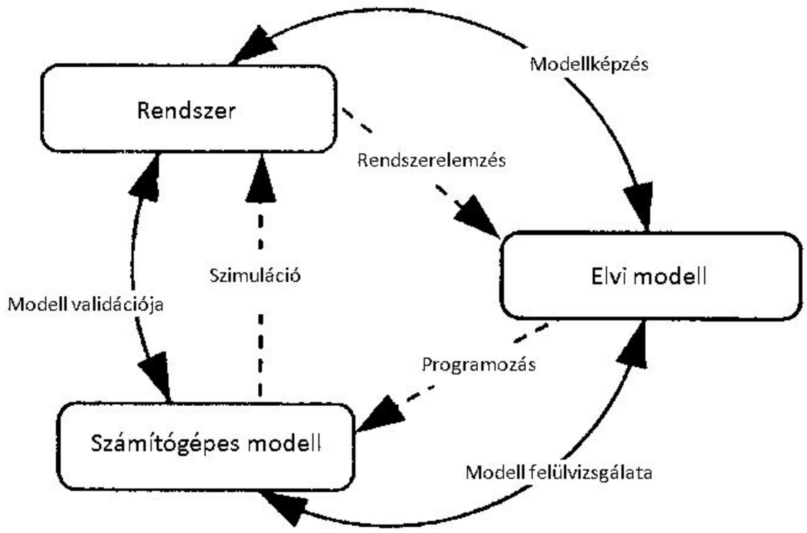
Egy mérnöki eljárás rutinszerű alkalmazása elvezethet oda, hogy észrevétlenül túllépjük az alkalmazhatósági határokat. Ezért mindig tudatosítani kell az alkalmazóval a modellt, amelynek eredménye az eljárás, a számítás, valamint azt, hogy melyek az alkalmazásának feltételei.

Összességében a modellezési célok lehetnek:

- modellezés (tervezés alatt álló rendszerek vagy speciális jelenségek vizsgálata, lehetséges műszaki megoldások kiválasztása, egyes szerkezeti jellemzők eltéréseinek tanulmányozása);
- tervezés (optimális rendszerek kialakítása, gazdaságosabb megoldások keresése, valamint

élettartam- és költségtervezés);
- vizsgálat (üzemi jellemzők értékelése, szerkezeti, üzemelletési jellemzők eltérései hatásainak elemzése, diagnosztikai jellemzők kiválasztása);
- vizsgálat tervezése (kísérleti próbajáratok, üzembe-helyezési programok meghatározása, diagnosztikai üzemmódok kijelölése, alkalmassági vizsgálatok programjainak összeállítása);
- minősítés (alkalmassági előírások, minőségi követelmények kidolgozása);
- irányítás, szabályozás (optimális és adaptív irányítás, egyedi állapotszabályozás megvalósítás);
- állapot-felismerés (adatgyűjtő és feldolgozórendszerben alkalmazható, könnyen azonosítható, adaptív modellek kidolgozása).

A számos szakirodalom eltérő módon fogalmazza meg a matematikai modellezés és szimuláció folyamatát, annak főbb lépéseit. Az irodalmak mindegyike lényegében a korábban már meghatározott három mozzanatot írja le, a szerzőik eltérő szemlélete függvényében. Ezen a különbségek fő okai — a szakemberek eltérő szemléletén túl — az, hogy modellalkotást más-más elemzési célból írják le és elemzik.



2. ábra A modellezés és szimuláció elsődleges fázisai és feladatai

A Számítógépes Szimulációs Társaság (Society for Computer Simulation) 1979-ben meghatározta a modellezés és a szimuláció elsődleges fázisainak és feladatainak egy másik sémáját. Bár ez a séma is egyszerű szerkezetű, jól mutatja a modellezés és a szimuláció legfőbb feladatait, illetve szemlélteti a modell képzésének, felülvizsgálatának és validálásának helyét, szerepét a folyamatban.

A 2. ábra azt szemlélteti, hogy a rendszerelemzés az adott rendszer elvi modelljének megalkotásához alkalmazzák. A modellképzés, azaz a modell $\boldsymbol{M}$ szerkezetének megadása, tulajdonképpen a matematikai modell felépítésének, fokszámának rögzítését jelenti, a leíró egyenleteinek formalizált megadásával együtt. Ez történhet a fentiekben már ismertet white-, black- vagy gray-box eljárások valamelyikével.

A programozás során az elvi modellt konvertáljuk matematikai (számítógépes) modellé. Ekkor kell megadnunk a rendszert jellemző belső paraméterek alapján az adott modell ***p*** paramétereit.

A matematikai modell egyik alapvető megoldási módja az analitikus megoldás, de napjainkban a számítógépek rendkívül széles körű elterjedésével egyre jobban előtérbe kerülnek a különböző numerikus megoldások alkalmazása is.

A numerikus megoldások során gyakorlatilag csak a digitális számítógépeknek van igazán szerepe a hétköznapi életben előforduló alkalmazásoknál. Nem elfelejtendő azonban az, hogy néhány területen a dinamikus rendszerek vizsgálatára igen hatékonyan alkalmazhatók az analóg számítógépek is. Az analóg számítógépek lényegében az adott folyamat vagy rendszer elektromos analóg modelljeit jelentik. Legnagyobb hátrányuk a bemeneti adatok megadásának, illetve az eredmények megjelenítésének nehézkes kezelése. Ezen problémák megoldásának egyik lehetséges módja a hibrid számítógépek, vagy hibrid-analóg szimulációs programrendszer alkalmazása digitális számítógép esetén. Ezen utóbbi megoldási módszer azért nagyon népszerű, mert kikerüli az összes, az analóg gépek esetén fennálló nehézséget, de kihasználja annak minden előnyét.

A modell „jóságának" ellenőrzése tulajdonképpen a mért eredményekkel való összevetést jelenti. Amennyiben az ellenőrzés során kiderül, hogy a feltételezett modell nem teljesíti az adott mérnöki vagy tudományos probléma kapcsán megkövetelt pontossági előírásokat, akkor minden esetben egy iterációs feladatot kell megoldanunk. Ez azt jelenti, hogy vissza kell térnünk a modellalkotási algoritmus elejére, és esetleg újabb paraméterek bevonásával, figyelembevételével egy újabb, javított felépítéssel kell elvégezni a modell azonosítását. Ezután természetesen újból végre kell hajtanunk a modell validálásához leírt feladatokat.

A vizsgált rendszer viselkedésének leírására felállított matematikai modell jósága igazolásának legegyszerűbb módja az, hogy az eredeti rendszerben méréseket végzünk, és azok eredményeit összevetjük a modell által szolgáltatott eredményekkel. Ezek alapján lehet a modell végleges szerkezetét és a leíró egyenletben szereplő paraméterek (p_i, $i = 1; 2; \ldots ;k$) értékeit megadni. A fizikai alap megközelítés esetében a modellszerkezet adott, ezért ott elsősorban a paraméterek értékeinek meghatározására kell figyelnünk.

A modellalkotás során — matematikai értelemben a modell ($\hat{y}$) és a mérések (y) által szolgáltatott eredmények eltéréseit kell minimálni (identifikáció):

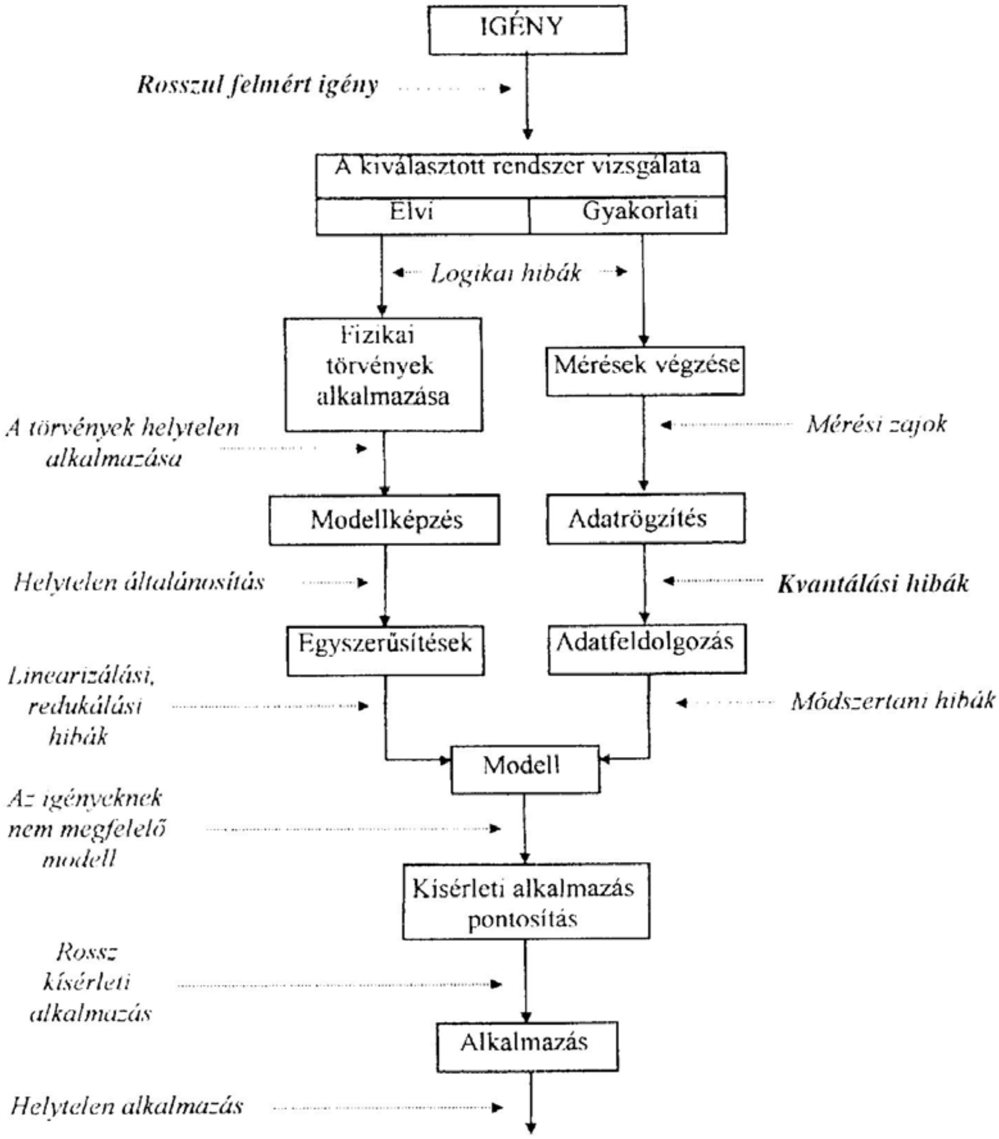
$$y(\tau) - \hat{y}(p_i;\tau) \Rightarrow \min \quad . \tag{1}$$

Az előjeles eltérések kompenzáló hatásának elkerülésére, a minimálási feladat megoldására leggyakrabban az úgynevezett legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk. Ennek alapján a (1) egyenlet — a négyzetes eltérések összegének minimálási feltételével — a vizsgált folyamat teljes T időtartamára vonatkozóan a következő módon irható át:

$$\int_0^T \{y(\tau) - \hat{y}(p_i;\tau)\}^2 d\tau \Rightarrow \min \quad . \tag{2}$$

Ha a rendszer vagy a modell diszkrét idejű, a (2) egyenletet módosítani kell, és a $j = 1;2;\dots;m$ véges számú mintavételezési időpontokban vett értékek alapján felírni:

$$\sum_{j=1}^{m}\{y_j - \hat{y}_j(p_i)\}^2 \Rightarrow \min \quad . \tag{3}$$



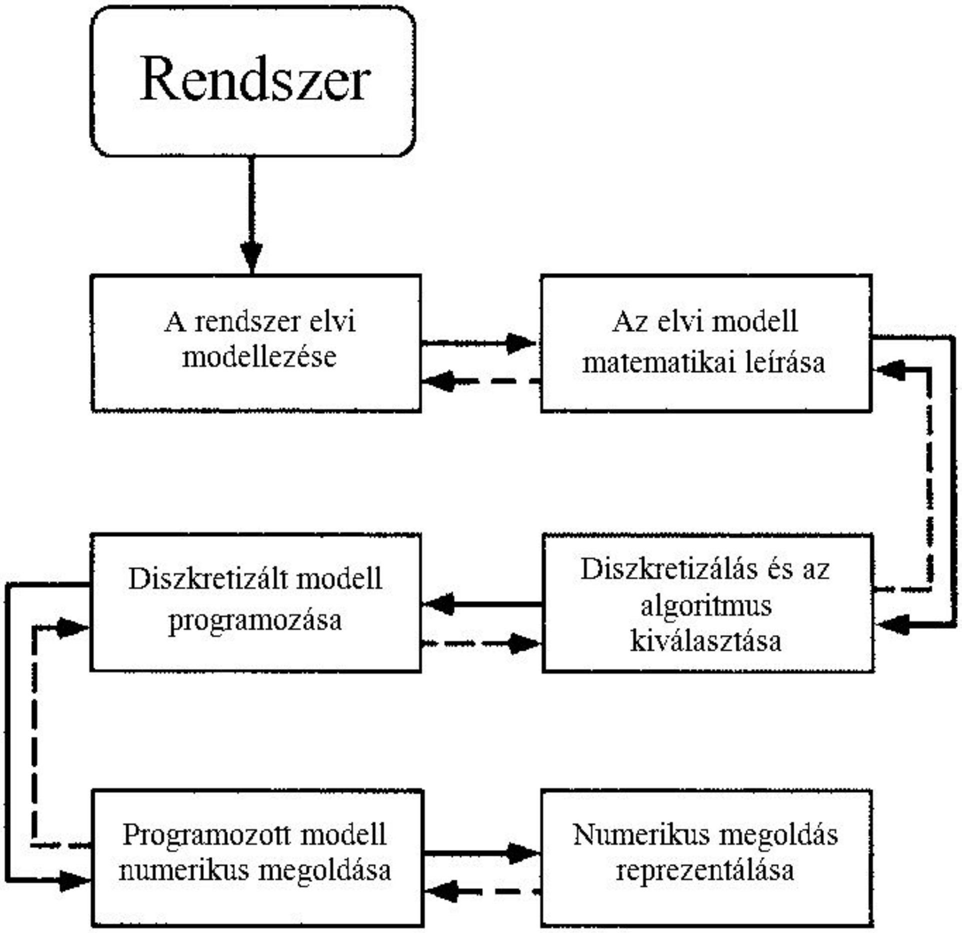
3. ábra. A modellképzés általános logikája

A már ellenőrzött és kellő pontossággal bíró matematikai modell legegyszerűbb felhasználási módja, a rendszer *y* kimenő változóit az *u* bemenő paraméterek különböző értékéi függvényében meghatározzuk. Tulajdonképpen ez a vizsgálati módszer a klasszikus értelemben vett szimuláció. Az 1. ábrával szemléltetve ez azt jelenti, hogy ismerjük a vizsgált rendszer ***M*** modelljét és ***p*** paramétereit. Ezek alapján elemezhetjük különböző *u* bemeneti változók hatását a rendszer *y* kimenetére. A kapott eredményekből vonhatunk le következtetéseket a rendszer viselkedésére, és tehetünk javaslatot a rendszer tervezésére, esetleg módosítására. Ez a feladat az úgynevezett paraméterérzékenységi vizsgálat. Fontos, hogy már a rendszer tervezésekor is gondot fordítsunk azon paraméterek azonosítására, amelyek a rendszer viselkedését döntően befolyásolják, amelyekre a rendszer a legérzékenyebben reagál.

Több be-, és kimenetű, MIMO rendszernél valamennyi kimeneti változóra meg kell határoznunk valamennyi bemenő paraméter okozta változást, amely elemzés eredménye az úgynevezett. érzékenységi mátrix.

Lényegében a fent leírt folyamat egy más szempontú, és részletesebb sémáját, általános logikáját szemlélteti a 3. ábra, ahol a dőlt betűkkel a lehetséges hibák is olvashatók.

A 4. ábra viszont a [8] irodalom szerzői interpretálásában szemlélteti a modellezés és a szimuláció fázisait.



4. ábra. A számítógépes modellezés és szimuláció ajánlott fázisai

Az itt megjelenített különböző fázisok tartalmazzák az összes nagyméretű szimulációs analízis részfeladatait, főleg arra az esetre, amikor a matematikai modell parciális differenciálegyenleteket tartalmaz. A fázisok sorrendje egyben az adat- és információáramlásokat is magában foglalja, megmutatva, hogy mely fázis lehet hatással a döntésekre vagy módszerekre későbbi fázisok valamelyikében. De, lehetséges jelentős visszacsatolás és interakció a fázisok között, melyeket a szaggatott vonalú nyilak jelképeznek az ábrán.

A modellezési és a szimulációs folyamat a tervezők vagy döntéshozók által feltett kérdésekkel kezdődik, melyeknek legalább egy része szimulációs elemzéssel válaszolható meg. Most nézzük a fázisokat külön-külön:

A rendszer elvi modellezése

Ebben a kezdeti fázisban meghatározzuk az adott rendszer és környezetének specifikációit. E specifikációk megfogalmazása során a rendszerben lejátszódó valós eseményeket és fizikai folyamatokat kell figyelembe vennünk. Szintén ekkor kell meghatározni azokat a rendszerelemeket és környezeti hatásokat, melyek valamilyen sztochasztikus jellemzőkkel bírhatnak. Ezek a meghatározások az adott modellezési feladat elvárásaira alapulnak, figyelembe véve a rendszer lehetséges érzékenységét eme jelenségekre, folyamatokra és elemekre. A rendszer elvi modellezése során nem matematikai egyenleteket kell felírnunk, hanem a lehetséges események, és fizikai folyamatok alapvető feltételeit kell meghatároznunk.

A rendszer és a környezet specifikációinak meghatározása után a fizikai jellemzők kapcsolatainak különböző szintjeit kell meghatároznunk. Ha ez nem történik meg, akkor a későbbi fázisokból vissza kell térnünk ehhez a fázishoz.

Az elvi modell matematikai leírása

Ennek a fázisnak a legelsődlegesebb feladata a részletes és pontos matematikai modell felállítása. Egy rendszer vagy folyamat komplex matematikai modellje általában számos matematikai részmodellt tartalmaz. Ilyenek lehetnek például egy összetett rendszer esetén az elemek és berendezések modelljei. A modell komplexitása nagymértékben függ a fizikai paraméterek komplexitásától, azok számosságától és a köztük lévő kapcsolatok szintjeitől. Az ekkor felállított matematikai modellek parciális differenciálegyenletek, perem- és segédfeltételek, valamint kezdeti feltételek meghatározásának összességét is tartalmazza.

Szintén ezen fázis során kell meghatároznunk a modellel kapcsolatos nem-determinisztikus kérdések jelenlétét is. Számos elmélet és megfontolás segítheti a feladat megoldását.

Következő fontos kérdés a modell nem-komplexitása, mivel a modell a vizsgált rendszer „csak” egyszerűsített leképezése. („***Minden modell rossz, néhány közülük használható.***” [8]) Fontos itt egy kicsit megállnunk. A modellalkotás egyik lényegi kérdése pont a modell komplexitásának és nem-komplexitásának egyensúlya. NÁNDORI [6] könyvében ezt a kérdést az alábbi szerint fogalmazza meg:

„Az a jó modell, amely a lehető legegyszerűbb,
de a célnak megfelelő pontossággal közelíti a valóságot.”

Mit is jelent ez az egyszerű, de nagyon tömör mondat? Az, és csak az a modellnek tekinthető jónak, amely a vizsgálat szempontjából fontos paramétereket, összefüggéseket és a peremfeltételeket megfelelő pontossággal figyelembe veszi, de mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak.

Diszkretizálás és az algoritmus kiválasztása

Ez a fázis két fő feladatból áll.

Ezek közül az első, hogy a folytonos (idejű és/vagy paraméterű) matematikai modellt diszkretizáljuk, úgy hogy az numerikusan megoldható legyen, azaz létrehozzuk a rendszer numerikus modelljét. Egyszerűen megfogalmazva, a matematika segítségével a differenciál- és integrálszámítási feladatokat aritmetikai feladatokká alakítjuk át. A diszkretizálás során az összes térbeli és időbeli differenciálási módszert, a diszkrét formában meghatározott peremfeltételeket és geometriai határokat, valamint — ha az szükséges — a rácsgenerálási módszereket analitikai formában kell meghatároznunk. Más szóval az algoritmusokat és a módszereket matematikailag diszkrét formában kell leírnunk. Ekkor a folytonos matematikai formák diszkrété való átalakítására koncentrálunk, nem a numerikus megoldásra.

Ennek a fázisnak a másik fő feladata a diszkretizált matematikai modell, az elérni kívánt modellezési pontosság és — ha az indokolt — az alkalmazandó számítógép sajátosságai alapján az algoritmus kiválasztása.

A diszretizált modell programozása

Ez a fázis mindegyik modellezése feladatnál megegyezik. Ekkor a korábbiakban felállított numerikus modell és a kiválasztott megoldási algoritmus adott programnyelvre való lefordítását kell elvégezni. A feladat nagyméretű, összetett rendszer és így modell esetén programozó bevonását teheti szükségessé. Viszonylag egyszerűbb esetekben felhasználhatunk valamilyen ismert kereskedelmi programrendszert (például Matlab+Simulink) is.

A programozott modell numerikus megoldása

Ekkor az előző fázisban megírt számítógépes program futtatásával meghatározzuk a numerikus modell eredményeit, azaz a kimenő jellemzőket.

A numerikus megoldás reprezentálása

A modellezés és szimuláció utolsó fázisa a számítási eredmények reprezentálása, megjelenítése, valamint azok interpretálása, értelmezése. Ekkor különféle számsorok, táblázatok, grafikonok vagy diagramok formájában jelenítjük meg az eredményeket. Ezt követően adott szakmai szempontok alapján — részben szubjektív módon — értelmezzük azokat. Az értelmezést és így annak eredményét nagyban befolyásolja, sőt lényegében meg is határozza a modellezési cél. Így az értelmezés eredménye alkalmazható új rendszer tervezésére, méretezésére, meglévő rendszer módosítására, felhasználható üzemeltetési vagy más szempontú döntések előkészítésére, támogatására. Ez utóbbi esetben fel kell hívni a figyelmet, hogy a döntési folyamat során alkalmazott modellek, illetve a velük kapott eredmények „csak” segédeszközök lehetnek a döntéshozó számára. A döntést az arra felhatalmazott személynek kell meghoznia.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Budó Á., Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. pp. 517.

[2] Budó Á., Kísérleti fizika II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. pp. 395.

[3] Csáki, F., Fejezetek a szabályzástechnikából Állapotegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973., pp. 487.

[4] Fodor, Gy., Jelek és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006., pp. 470.

[5] Korn, G.A. – Korn, T.M., Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1975., pp.995.

[6] M. Csizmadia, B. – Nándori, E., Modellalkotás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003., pp. 579.

[7] Matematikai kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 443.

[8] Oberkampf, W.L. – DeLand, S.M. – Rutherford, B.M. – Diegert, K.V. – Alvin, K.F., Error and uncertainty in modeling and simulation, Reliability Engineering & System Safety 75 (2002), p. 333–357.

[9] Pokorádi, L., A matematikai modellek és alkalmazásuk a repülőműszaki gyakorlatban, az MHTT. Légvédelmi Repülő és űrhajózási Szakosztály pályázatán III. díjat nyert pályamunka, 1992., Jelige: *Mérnök*, pp. 29.

[10] Rohács, J. – Simon, I., Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Budapest, 1989., pp. 523.

[11] Szabó I., Rendszer- és irányítástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994. pp. 457.

[12] Szalay, B., Fizika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 922.

[13] Szűcs, E., Hasonlóság és modell, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 299.

[14] Űrhajózási lexikon, Akadémiai kiadó, Zrínyi Katonai kiadó, Budapest, 1981., pp. 999.

[15] Zadeh, L.A. – Polak, E., Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 476.