Szolnoki Tudományos Közlemények XII.
Szolnok, 2008.

A megismerés térben és időben végtelen.
Vedd ki a számot a dolgokból, és minden összeomlik.
Sevillai Izidor:~560-636

Dr. GÁBORI JÓZSEF

ELEMI FÜGGVÉNYEK HATVÁNYAINAK INTEGRÁLÁSA[1]

BEVEZETÉS

Arra kérdésre keresem a választ, mi a primitív függvénye az $f^{\alpha}(x)$, α=valós elemi függvénynek, azaz,ha $f(x) = \ln x, \sin x, \cos x, tg\, x, ctg\, x, sh\, x, ch\, x, th\, x, cth\, x, e^{x}, x$. Abban az estben, amennyiben α nem pozitív, vagy nem egész, és zárt alakban nem, esetleg nem is integrálható, visszavezetem az integrálást olyan hatvány függvény integrálására, amelynek kitevője a [-1,1] intervallumba esik.

A többszörös integrálokra is felírok általánosan használható formulát.

Az $f_1^{m}(x) f_2^{n}(x), m \in R$ szorzatfüggvény integrálására is adok megoldást, abban az esetben, $f_1(x)$ és $f_2(x)$ elemi függvények.

Akit nem érdekelnek a részletek, a sok-sok speciális eset, az **összegzésnél** (159. oldal) kezdheti a dolgozat tanulmányozását!

LOGARITMIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Tétel 1

$$F_{1,\alpha}(x) = \int \ln^{\alpha} x dx = x[\ln^{\alpha} x - \alpha \ln^{\alpha-1} x + \alpha(\alpha-1)\ln^{\alpha-2} x \mp \ldots \pm \alpha! \ln x \mp \alpha!] + C_1, \alpha \in R$$

[1] A teljes anyag megtalálható www.vizcsopp.hu/gabori címen.

BIZONYÍTÁS

$$F_{1,\alpha}(x)=\int f^{\alpha}(x)dx=\varphi(x)[f^{\alpha}(x)-\alpha f^{\alpha-1}(x)+\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}(x)\mp\ldots\pm\alpha!f(x)\mp\alpha!]+C_1,\ \alpha\in R$$

$$F'_{1,\alpha}(x)=f^{\alpha}(x)=\varphi'(x)[f^{\alpha}(x)-\alpha f^{\alpha-1}(x)+\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}(x)\mp\ldots\pm\alpha!f(x)\mp\alpha!]+$$
$$+\varphi(x)[\alpha f^{\alpha-1}(x)f'(x)-\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}(x)f'(x)+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)f^{\alpha-3}(x)f'(x)\mp\ldots\pm\alpha!f'(x)]=$$
$$=\varphi'(x)f^{\alpha}(x)-\alpha\varphi'(x)f^{\alpha-1}(x)+\alpha(\alpha-1)\varphi'(x)f^{\alpha-2}(x)\mp\ldots\pm\alpha!\varphi'(x)f(x)\mp\alpha!\varphi'(x)+$$
$$+\alpha\varphi(x)f^{\alpha-1}(x)f'(x)-\alpha(\alpha-1)\varphi(x)f^{\alpha-2}(x)f'(x)\pm\ldots\mp\alpha!\varphi(x)f'(x)]=$$
$$=\varphi'(x)f^{\alpha}(x)+\alpha[\varphi(x)f'(x)-\varphi'(x)]f^{\alpha-1}(x)-\alpha(\alpha-1)[\varphi(x)f'(x)-\varphi'(x)]f^{\alpha-2}(x)\pm\ldots\mp$$
$$\mp\alpha![\varphi(x)f'(x)-\varphi'(x)]=$$
$$=\varphi'(x)f^{\alpha}(x)+[\varphi(x)f'(x)-\varphi'(x)][\alpha f^{\alpha-1}(x)-\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}(x)+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)f^{\alpha-3}(x)\mp\ldots\pm\alpha!]$$
$$f^{\alpha}(x)=\varphi'(x)f^{\alpha}(x)+[\varphi(x)f'(x)-\varphi'(x)][\alpha f^{\alpha-1}(x)-\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}(x)+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)f^{\alpha-3}(x)\mp...\pm\alpha!]$$

1. eset

$$\varphi'(x)=1,\ \varphi(x)=x+c$$
$$\varphi'(x)-\varphi(x)f'(x)=0,\ f'(x)=\tfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},\ f(x)=\ln\varphi(x)+c$$

A két feltételt egybevetve

$$f(x)=\ln x+c$$

Vagy:

2. eset

$$\varphi'(x)=1,\ \varphi(x)=x+c$$
$$\alpha f^{\alpha-1}(x)-\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}(x)+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)f^{\alpha-3}(x)\mp\ldots\pm\alpha!=0$$

Nem szolgáltat megoldást!

Ezzel bizonyítást nyer a tétel.

Legyen α=n, n∈N

$$F_{1,n}(x)=\int\ln^{n}x\,dx=x[\ln^{n}x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x\mp\ldots\pm n!\ln x\mp n!]+C_1$$

SPECIÁLIS ESETEK

$$F_{1,0}(x)=\int \ln^0 x dx=\int dx=x+C_1$$

$$F_{1,1}(x)=\int \ln x dx=x(\ln x-1)+C_1$$

$$F_{1,2}(x)=\int \ln^2 x dx=x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C_1$$

$$F_{1,3}(x)=\int \ln^3 x dx=x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6)+C_1$$

$$F_{1,4}(x)=\int \ln^4 x dx=x(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24)+C_1$$

$$F_{1,5}(x)=\int \ln^5 x dx=x(\ln^5 x-5\ln^4 x+20\ln^3 x-60\ln^2 x+120\ln x-120)+C_1$$

$$F_{1,6}(x)=\int \ln^6 x dx=x(\ln^6 x-6\ln^5 x+30\ln^4 x-120\ln^3 x+360\ln^2 x-720\ln x+720)+C_1$$

$$F_{1,7}(x)=\int \ln^7 x dx=x(\ln^7 x-7\ln^6 x+42\ln^5 x-210\ln^4 x+840\ln^3 x-2020\ln^2 x+5040\ln x-5040)+C_1$$

$$F_{1,8}(x)=\int \ln^8 x dx=$$
$$=x(\ln^8 x-8\ln^7 x+56\ln^6 x-336\ln^5 x+1680\ln^4 x-6720\ln^3 x+20160\ln^2 x-40320\ln x+40320)+C_1$$

$$F_{1,9}(x)=\int \ln^9 x dx=$$
$$=x(\ln^9 x-9\ln^8 x+72\ln^6 x-504\ln^6 x+3024\ln^5 x-15120\ln^4 x+$$
$$+60480\ln^3 x-181440\ln^2 x+362880\ln x-362880)+C_1$$

$$F_{1,10}(x)=\int \ln^{10} x dx=$$
$$=x(\ln^{10} x-10\ln^9 x-90\ln^8 x+720\ln^6 x-5040\ln^6 x+30240\ln^5 x-151200\ln^4 x+$$
$$+604800\ln^3 x-1814400\ln^2 x+3628800\ln x-3628800)+C_1$$

$\vdots$

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

TÉTEL 2

$$F_{1,n}(x)=\int f^n(x)dx=$$
$$=\begin{cases} a_{n-1}f^{n-1}(x)f'(x)+a_{n-3}f^{n-3}(x)f'(x)+a_{n-5}f^{n-5}(x)f'(x)+\ldots+a_1f(x)f'(x)+a_0f'(x)+C_1,\ n=2k-1 \\ a_{n-1}f^{n-1}(x)f'(x)+a_{n-3}f^{n-3}(x)f'(x)+a_{n-5}f^{n-5}(x)f'(x)+\ldots+a_1f(x)f'(x)+a_0x+C_1,\ n=2k \end{cases}$$
$$,\ k=1,2,3,\ldots$$

Legyen $f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x$

$$F_{1,n}(x)=\int \sin^n x dx=$$
$$=-\tfrac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x-\tfrac{n-1}{n(n-2)}\sin^{n-3} x\cos x-\tfrac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}\sin^{n-5} x\cos x-\ldots-$$
$$-\tfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots4}{n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots3}\sin^2 x\cos x-\tfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots2}{n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots1}\cos x+C_1,\ n=2k-1,\ k=1,2,3,\ldots$$

$$F_{1,n}(x)=\int \sin^n x dx=$$
$$=-\tfrac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x-\tfrac{n-1}{n(n-2)}\sin^{n-3} x\cos x-\tfrac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}\sin^{n-5} x\cos x-\ldots-$$
$$-\tfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots1}{n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots2}\sin x\cos x+\tfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots1}{n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots2}x+C_1,\ n=2k,\ k=1,2,3,\ldots$$

SPECIÁLIS ESETEK

$$F_{1,0}(x) = \int \sin^0 x dx = \int 1 dx = x + C_1$$

$$F_{1,1}(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$$

$$F_{1,2}(x) = \int \sin^2 x dx = -\tfrac{1}{2} \sin x \cos x + \tfrac{1}{2} x + C_1$$

$$F_{1,3}(x) = \int \sin^3 x dx = -\tfrac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \tfrac{2}{3} \cos x + C_1$$

$$F_{1,4}(x) = \int \sin^4 x dx = -\tfrac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \tfrac{3}{8} \sin x \cos x + \tfrac{3}{8} x + C_1$$

$$F_{1,5}(x) = \int \sin^5 x dx = -\tfrac{1}{5} \sin^4 x \cos x - \tfrac{4}{15} \sin^2 x \cos x - \tfrac{8}{15} \cos x + C_1$$

$$F_{1,6}(x) = \int \sin^6 x dx = -\tfrac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \tfrac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \tfrac{15}{48} \sin x \cos x + \tfrac{15}{48} x + C_1$$

$\vdots$

A többi függvény integrálja a fent megjelölt címen megtekinthető.