



**OLÁH BÉLA<sup>1</sup> – MÉSZÁROS ALEXANDRA ÉVA<sup>2</sup>**

## **NÉGYZETEK TÉGLALAPBA HELYEZÉSÉNEK ÚJ EREDMÉNYEI<sup>3</sup>**

*A téglalapok sűrű pakolásainak egyrészt raktározási-, szállítási feladatoknál, másrészt ütemezési kérdéseknél van szerepe, de elméleti jelentőségű feladatoknál is fontos. Hazánkban többen értek el eredményeket ezen a területen. Számos izgalmas kérdés azonban még felderítetlen maradt. A dolgozat készítőiként feladatul tűztük ki a szakirodalomban is nyitott kérdésként kezelt  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , ...,  $24 \times 24$ -es négyzetek egy  $70 \times 71$ -es téglalapba történő elhelyezés létezésének bizonyítását, illetve még ennél is jobb megoldások megtalálását. E témafeldolgozás kapcsán különös problémát jelent, hogy minden négyzetet átfedés nélkül kell elhelyezni a befoglaló téglalapba. Ráadásul ezen megoldások már PRIMA megoldások, hiszen a befoglaló téglalap egyik oldalát sem lehet tovább csökkenteni a másik oldal fixen hagyása mellett, ekkor ugyanis a téglalap területe kisebbre adódna, mint a kis négyzetek együttes összterülete. Munkánk során igyekszünk rámutatni az ilyen jellegű feladatok gyakorlati jelentőségére, mint az egységtrakomány-képzés, illetve a rakodási tervek kialakítása.*

A dolgozat **célkitűzése** az volt, hogy bizonyítsuk a  $70 \times 71$ -es megoldás létezését, illetve megtaláljuk a  $69 \times 72$ -es megoldást, vagy bizonyítsuk, hogy ilyen téglalap nincs, továbbá felleljük a  $68 \times 73$ -as megoldást, a  $67 \times 74$ -est, és így tovább, valamint az idegen nyelvű szakirodalmat olyan szinten feldolgozzuk, hogy az mindenki számára érthető legyen a vonatkozó magyar szakirodalom meglehetősen szűkösségére való tekintettel is.

Mivel a legfrissebb szakirodalomban is nyitott kérdésként kezelik ezen eseteket – illetve a legkisebb tartalmazó téglalap sem ismert, amelybe ezen 24 különböző négyzet átfedés nélkül elhelyezhető lenne –, így témaválasztásunk időszerűségéhez, aktualitásához, messze nem férhet kétség.

A dolgozat első fő fejezetében összegyűjtöttük és feldolgoztuk a témához szorosan kapcsolódó hazai és nemzetközi szakirodalmat, továbbá igyekeztünk rámutatni az ilyen jellegű feladatok gyakorlati jelentőségére, mely az egységtrakomány-képzés, illetve a rakodási tervek kialakítása során jelentkezik. A következő tartalmi egység a dolgozat lényegi része, itt ismertetjük

<sup>1</sup> Szolnoki Főiskola Műszaki és Mezőgazdasági Fakultás, olahb@mfk.hu

<sup>2</sup> Szolnoki Főiskola Műszaki és Mezőgazdasági Fakultás, m.alexandraeva@freemail.hu

<sup>3</sup> Szaklektorált cikk. Leadva: 2009. szeptember 15. Elfogadva: 2009. december 10.

a saját eredményeinket és hasonlítjuk össze a szakirodalomban fellelhető megoldásokkal. A tanulmány harmadik fejezetében röviden összefoglaljuk a dolgozat lényeges mondanivalóját, továbbá iránymutatást adunk a téma iránt érdeklődők számára a további kutatásokhoz. Végül az utolsó fejezetben az általunk felhasznált irodalomjegyzéket találhatja meg a kedves érdeklődő.

Mivel a tartalmi és terjedelmi korlátok erősen kötöttek, így dolgozatunk elsődleges célja a fent említett feladatok mindegyikéhez egy megoldási változat bemutatása. Ennek ellenére bízunk abban, hogy a következő oldalak a tanulmány minden olvasója számára egyrészt érdekesek, másrészt hasznosan hozzájárulnak az optimalizálásban jól alkalmazható megoldások kimunkálásához.

## SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS

### EGYSÉGRAKOMÁNY-KÉPZÉS

**Az egységtrakományos szállítás.** A kisebb méretű és tömegű árukat (csomagokat) nagyobb méretű és tömegű, géppel kezelhető egységtrakományokká összefogva célszerű szállítani. Az automatizált anyagáramlási folyamatokban az egységtrakomány-képző eszközök a rakományhordozó szerep mellett információhordozó szerepet is betöltenek. A helyesen – rendszerszemléleti szempontok szem előtt tartásával – megválasztott egységtrakomány-képző eszközök a szállítási lánc részfolyamatainak zökkenőmentes összekapcsolását, összehangolását, a rakodási, szállítási és tárolási költségek minimalizálását teszik lehetővé (Kerepeszki 2001).

Olyan egységtrakomány-képző eszközöket célszerű alkalmazni, amelyek a szállítási lánc teljes folyamatában – a termelőtől a felhasználóig – optimálisan beilleszthetők az anyag- és információáramlási folyamatba. Törekedni kell a

$$\text{termelési egység} = \text{raktározási egység} = \text{szállítási egység} = \text{értékesítési egység}$$

egyenlőség megvalósítására.

*Az egységtrakomány-képző eszközök alkalmazásának jelentősége*

Az egységtrakományos szállítás fő előnyei a következőkben foglalhatók össze. Lehetővé teszi:

- az árukezelési, rakodási munkák gépesítését, illetve automatizálását;
- az árukezelési, rakodási műveletek számának csökkentését;
- integrált szállítási láncok kialakítását;
- az árukezelési (pl. áruátvételi), rakodási idők csökkentését;
- a szállított áruk fokozottabb védelmét a rakodás, a szállítás és a tárolás (RST műveletek) közötti áru-igénybevételekkel szemben;
- csomagolási költségmegtakarítások elérését;
- helytakarékos, gépesített, illetve automatizált tárolási technológiák alkalmazását;
- az áruk dézsmálás elleni fokozottabb védelmét (Prezenszki 2004).

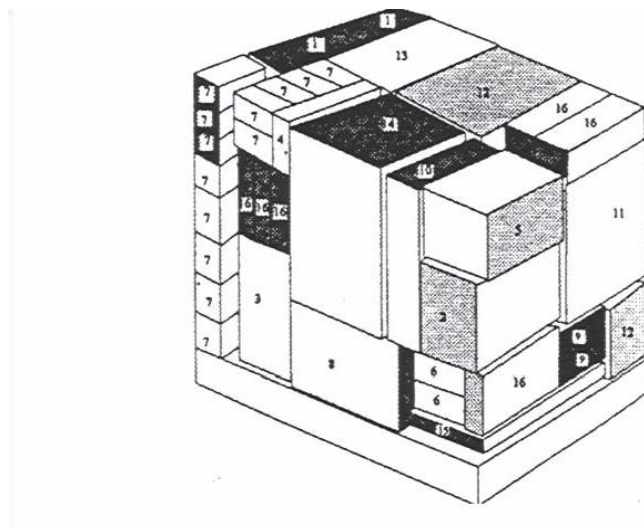
*Az egységtrakományos szállítás fő hátrányai:*

- az egységtrakomány-képző eszközök (ERKE) beszerzése nagy árumennyiség szállítása esetén viszonylag magas költségráfordítást igényelhet;

- az üres egység rakomány-képző eszközök visszaszállítása többlétszállítási ráfordítást jelent, célszerű lehet ezért ilyen esetekben összehajtható, illetve -csukható vagy egyszeri felhasználású, ún. egyutas egység rakomány-képző eszközöket alkalmazni;
- az egység rakomány-képző eszközök saját tömege, illetve térfogata miatt esetenként kisebb lehet az adott járműben, illetve tárolótérben elhelyezhető nettó árutérfogat az egység rakomány nélküli szállításhoz, tároláshoz képest.

## RAKODÁSI TERV

Az egység rakomány-képző eszközöket, továbbá megválasztásuk, biztonságos megrakásuk, rakodásuk szempontjait a vonatkozó szakirodalom részletesen ismerteti. Itt csak azt emelném ki, hogy az egység rakomány-képző eszközök és a szállító járművek rakfelületének, illetve rakterének optimális kihasználása érdekében különös gondot kell fordítani a csomag- és az egység rakomány-méretek, valamint az egység rakomány-, és járműraktér-méretek összhangjára. Ennek elérése érdekében rakodási terveket célszerű készíteni. Ehhez ma már olyan tervezői szoftverek is rendelkezésre állnak, amelyek pl.: inhomogén (különböző alakú és méretű) szállítói csomagokból alakítják ki – különböző optimalizálási célfüggvényeket figyelembe véve – pl.: a rakodólapos rakományt (Kerepeszki 2001).



1. ábra: Számítógéppel kialakított rakodási terv

Az egység rakomány-képzés során alapvetően két feladatot kell megoldani:

- az áruhoz ERKE-választás;
- az árunak az ERKE-be való berakási módjának, rakodási sorrendjének meghatározása.

Az ERKE megválasztásánál teljesülniük kell az alábbi feltételeknek:

- az áru az ERKE-n (ERKE-ben) elférjen;
- az áru súlya ne lépje túl az ERKE teherbírását;
- az áru helyzete az ERKE-n (ERKE-ben) stabilan rögzíthető legyen;
- az ERKE az előforduló tárolóhelyeken, rakodó- és szállítóeszközökön elférjen.

A kiválasztott ERKE típus mellett a háromdimenziós pakoláshoz többféle optimalizálandó célfüggvény is megfogalmazható:

- az ERKE-ben minél több áru férjen el;
- minimális legyen a berakodási idő;
- maximális legyen az ERKE térkitöltése;
- az előforduló tárolónak, illetve szállítóeszköznek maximális legyen a térkihasználása.

Az nyilvánvaló, hogy valamennyi célfüggvényt általában nem sikerül egyszerre kielégíteni, mert némelyeknél ellentétes hatások érvényesülnek, de lehetséges az optimalizálás során több célfüggvényt is együttesen kezelni.

Ellentétes hatású például: a minimális berakodási idő és a maximális térkihasználás.

Az egységgrakomány-képzés lehet:

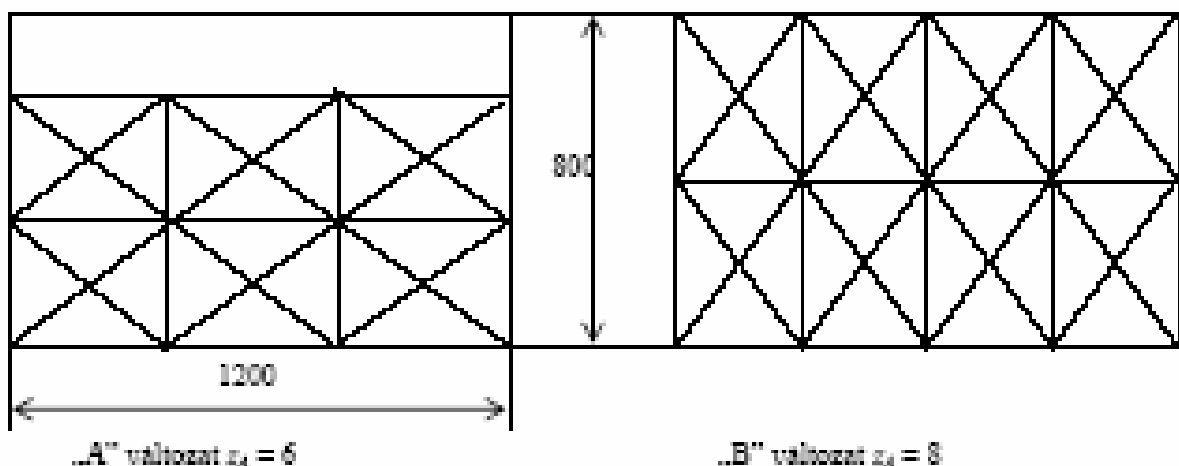
- homogén, ha az ERKE-be csak egyféle árut helyezünk el;
- inhomogén (kevert), ha egy ERKE többféle terméket is tartalmaz (pl.: kommissiózás).

### *HOMOGÉN EGYSÉGRAKOMÁNY-KÉPZÉS*

Homogén egységgrakomány-képzésről beszélünk, ha adott  $n$  féle áru, amelynek egységgrakomány-képzését kell megoldani, úgy hogy  $m$  féle ERKE áll rendelkezésünkre és ezek közül kell a legmegfelelőbbet kiválasztani.

Az egységgrakomány-képzés legegyszerűbb változata a homogén egységgrakományok képzése egy optimalizálandó célfüggvény esetén. Célfüggvényként írjuk elő pl.: a térfogatkihasználás maximalizálását.

Első lépésben meg kell vizsgálni termékenként minden számításba jövő eszköznel az összes lehetséges berakási módot. A berakási mód-változat értelmezésére az alábbi ábra mutat egy példát: hasáb alakú darabok sík rakodólapon egy sorban történő elhelyezése esetén (Cselényi & Illés 2006).



2. ábra: Hasáb alakú darabok sík rakodólapon egy sorban történő elhelyezésének esetei

Több célfüggvény figyelembe vételének egyik módja, ha az egyes célfüggvények relatív értékeivel számolunk, majd ezután az egyes relatív-célfüggvény értékek súlyozott összege kerül az „egy célfüggvény” helyébe.

## TÖBBFOKOZATÚ EGYSÉGRAKOMÁNY-KÉPZÉS

Az egységrakomány-képzés bonyolultabb feladatai közé tartozik, ha valamely terméket a hozzá kiválasztott ERKE-vel együtt egy nagyobb ERKE-be rakjuk. Az RST folyamataiban gyakran előfordul, hogy az árut először gyűjtőcsomagba helyezük, a gyűjtőcsomagokat rakodólapra, a rakodólapok pedig konténerbe kerülnek.

A megoldás során, ha az áruhoz először az optimális gyűjtőcsomagot választanánk ki, majd ehhez keresnénk meg az optimális rakodólapot, aztán a rakodólaphoz az optimális konténert, akkor nem járnánk el helyesen, mert egyáltalán nem biztos, hogy a célfüggvény ily módon számítható értéke is optimális lesz. A lokális optimumok együttese nem feltétlen ad abszolút optimumot.

Az ókortól napjainkig mindig voltak olyan geometriai jellegű feladatok (játékok), amelyek tömegek érdeklődését keltették föl. Érdekes, hogy ezek többsége az egyik legegyszerűbb síkbeli alakzattal, a négyzettel áll kapcsolatban.

A négyzet-darabolás egyik változata: Egy alkalmasan választott egész-szám élű négyzetet kisebb négyzetekre kell felosztani úgy, hogy mindegyik négyzet különböző egész-szám élű legyen! Jó játék annak, akinek sok ideje van. Sokáig azt hitték, hogy a feladat megoldhatatlan: egy orosz matematikus, N. N. Lusin állította valaha, hogy a négyzetet nem lehet csupa különböző négyzetre szétvágni. De manapság már több megoldás is ismert. Roland Sprague 1939-ben publikált egy megoldást, ami 55 különböző kisebb négyzetből állított elő egy nagy négyzetet (Sprague 1939). A rekordot Duijvestijn tartja, aki 1978-ban csak 21 négyzetet használt, hogy egy 112 egység élű négyzetet rakjon össze belőlük (Duijvestijn 1978).

Persze a kérdést meg is lehet fordítani: hányfelé nem lehet darabolni egy négyzetet úgy, hogy minden darab maga is négyzet legyen? A 2, illetve a 3 azonnal adódik. De a többi? Van köztük legnagyobb?

Ennél sokkal kézenfekvőbb a háromdimenziós feladat, azaz egy egész-élű kockát sohasem lehet csupa különböző egész-élű kockákra szabdalni.

1975-ben a *Scientific American*ben a *Mathematical Games* (Matematikai játékok) rovatában, Martin Gardner megkérdezte az olvasóit, hogy mi az a legkisebb területű téglalap (négyzet), amibe el lehet helyezni egy 1x1-es négyzetet, egy 2x2-es négyzetet, és így tovább egészen egy 24x24-es négyzetig (Gardner 1975).

## ALAPFOGALMAK

**Squaring the square:** egy négyzet négyzetekre bontása.

**Perfect square** = *perfekt négyzet*: egy négyzet különböző négyzetekre bontása, persze hézagtalanul, átfedés nélkül.

**Imperfect square** = *imperfekt négyzet*: egy négyzet négyzetekre bontása, persze hézagtalanul és átfedés nélkül, de már nem minden négyzet kell, hogy különböző méretű legyen.

**Perfect rectangle** = *perfekt téglalap*: egy téglalap különböző négyzetekre bontása, természetesen hézagtalanul, átfedés nélkül.

**Imperfect rectangle** = *imperfekt téglalap*: egy téglalap négyzetekre bontása, természetesen hézagtalanul és átfedés nélkül, de már nem minden négyzet kell, hogy különböző méretű legyen.

**Simple perfect square** = *egyszerű perfekt négyzet*: olyan perfekt négyzet, aminek a felosztásában nincsenek két vagy több (de nem az összes) négyzetből álló téglalapok. Más szóval, nincs olyan részhalmaza az elemeknek, ami megegyezne egy téglalap alakjával.

**Compound perfect square** = *összetett perfekt négyzet*: nem egyszerű perfekt négyzet, azaz olyan perfekt négyzet, aminek a felosztásában már van két vagy több (de nem az összes) négyzetből álló téglalap.

**Squared square** = *négyzetelt négyzet*: a *squaring the square* eredménye, azaz egy négyzet már felbontva négyzetekre.

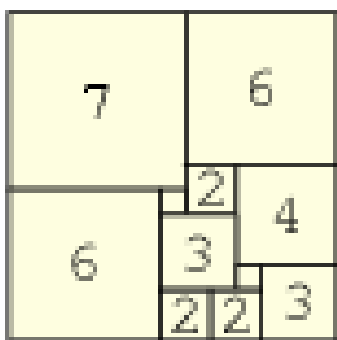
**Squared rectangle** = *négyzetelt téglalap*: egy téglalap már felbontva négyzetekre. Két kategóriáját különböztetjük meg: *simple perfect* és *simple imperfect squared rectangle*, azaz *egyszerű perfekt* és *egyszerű imperfekt négyzetelt téglalap*.

**Perfect squared square** = *perfekt négyzetelt négyzet*: egy négyzet különböző méretű négyzetekre bontva (azaz nincs két egyforma köztük), persze hézagtalanul, átfedés nélkül. A legelső *perfekt négyzetelt négyzetet* Sprague 1939-ben publikálta, ami 55 különböző kisebb négyzetből állított elő egy nagy négyzetet.

**Simple perfect squared square** = *egyszerű perfekt négyzetelt négyzet*: egy olyan perfekt négyzetelt négyzet, aminek a felosztásában nincsenek két vagy több (de nem az összes) négyzetből álló téglalapok. A legkisebb egyszerű perfekt négyzetelt négyzetet tehát A. J. W. Duijvestijn találta számítógépes keresés által, ami 21 kis négyzetet tartalmaz.

**Compound perfect squared square** = *összetett perfekt négyzetelt négyzet*: egy olyan perfekt négyzetelt négyzet, aminek a felosztásában már található két vagy több (de nem az összes) négyzetből álló téglalap. Egy 24 négyzetből álló összetett perfekt négyzetelt négyzetet Willcocks talált 1951-ben.

**Mrs. Perkins's quilt:** amikor egy négyzetelt négyzet olyan, hogy a kisebb négyzetek oldalhosszúságainak nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Más szóval a legnagyobb közös osztója az összes kisebb négyzet oldalhosszúságának 1. A perfekt négyzetelt négyzettel ellentétben a kisebb négyzeteknek nem szükséges mindnek különböző méretűnek lennie, de a cél, hogy a lehető legkevesebb számú négyzettel fedjük le a befoglaló négyzetet. A Mrs. Perkins's quilt elnevezés Dudeney könyvéből (Dudeney, 1917) való, ahol a 13 egység oldalhosszúságú négyzet négyzetekre bontására adott egy megoldást (3. ábra).



3. ábra: Az  $n=13$  Mrs. Perkins's quilt probléma megoldása

### A szakirodalomban fellelhető eddigi eredmények

A perfekt – vagy magyarul teljes – négyzeteket már az ókor óta tiszteli az emberiség. Egy pozitív egész szám akkor perfekt négyzet, ha valamely egész szám négyzete.

Felmerül a kérdés, hogy ha legalább kettő négyzetszámot összeadunk, mikor kapunk újra négyzetszámot. Ha a tagok száma kettő, akkor ez a Pitagoraszi számhármások keresésének klasszikus problémája [18].

A továbbiakban a figyelmünket az olyan, legalább háromtagú összegekre fordítjuk, amelyben a tagok különböző teljes négyzetek, és az összeg is teljes négyzet. Az első 24 négyzetszám összege teljes négyzet, hiszen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + 576 = 4900 = 70^2, \quad \sum_{k=1}^{24} k^2 = 70^2 = 4900. \quad (1)$$

A hetvenedik négyzetszám a teljes négyzetek sorozata elejének is az összege. És ezt az utóbbi jó tulajdonságot csak a legelső és a huszonnegyedik teljes négyzet tudja, derül ki Watson kilencvenéves eredményéből (Watson 1918), azaz:

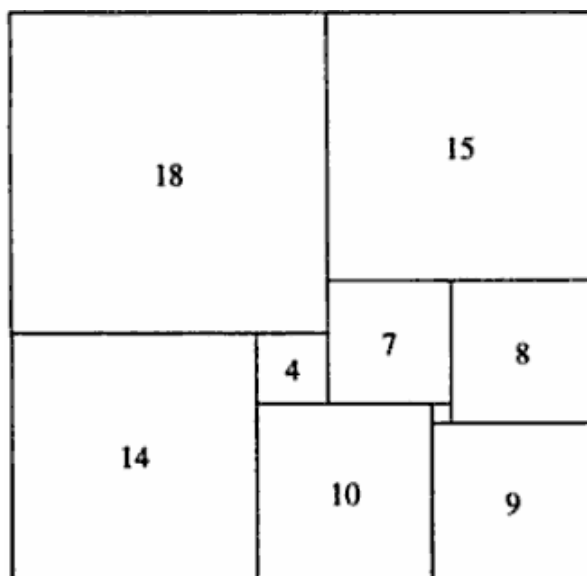
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = m^2 \quad (2)$$

összes pozitív egész megoldásai:  $n = m = 1$ , illetve  $n = 24, m = 70$ . Azaz csak két ilyen szám van: az 1 és a 4900.

De ne menjünk ennyire előre! Nézzük meg, hogyan tudunk néhány – 24-nél lényegesen kevesebb – páronként különböző négyzetből összerakni egy négyzetet. Nem is olyan könnyű ilyet találni! Egy majdnem négyzetre hamarabb sikerül rálelni:

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 32 \times 33 = 1056. \quad (3)$$

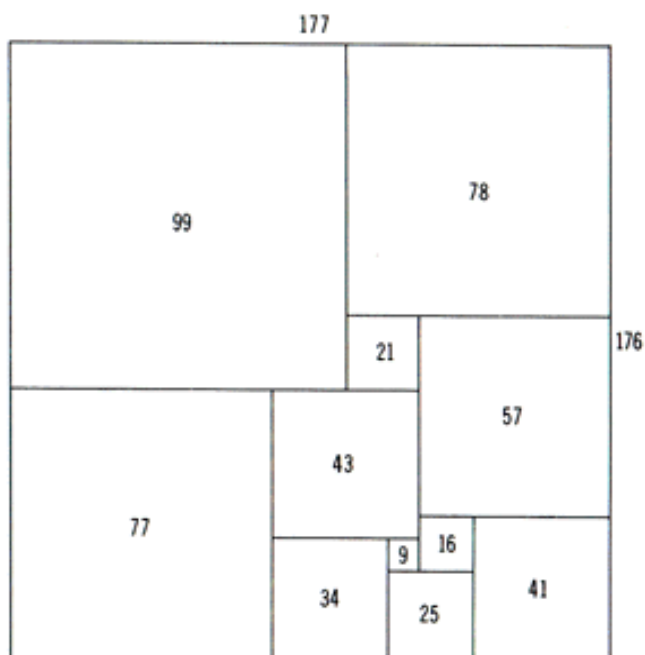
Ezt az elrendezést Zbigniew Moroń találta 1925-ben (4. ábra). Csak az a gond, hogy itt a jobboldal nem négyzetszám, pedig annak örülnénk inkább, ha az lenne.



4. ábra: Moroń 32x33-as eredménye (Moroń 1925)

Tovább próbálkozva egy másik megoldást is kapunk (5. ábra):

$$9^2 + 16^2 + 21^2 + 25^2 + 34^2 + 41^2 + 43^2 + 57^2 + 77^2 + 99^2 = 176 \times 177. \quad (4)$$



5. ábra: 176x177-es megoldás

Olyan elrendezés is ismert, amikor egy négyzetszám kétszerese jön ki (6. ábra):

$$2^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 20^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 27^2 + 29^2 + 30^2 + 35^2 + 49^2 + 53^2 + 65^2 + 67^2 + 69^2 + 71^2 + 83^2 = 2 * 136^2. \quad (5)$$

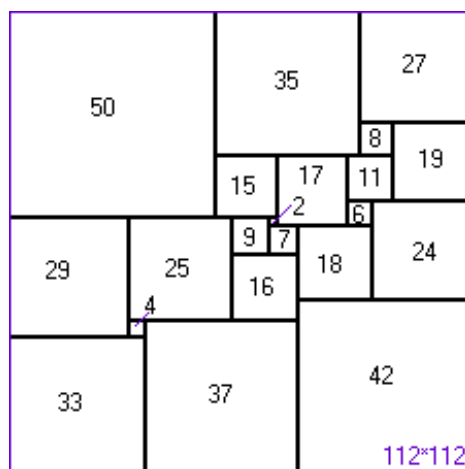




6. ábra: 136x272-es elrendezés

Úgy tűnik, ha a legkevesebb különböző négyzetből akarunk egy négyzetet kirakni, akkor Duijvestijn konstrukciója a legjobb megoldás, amely 21 darab kis négyzetből áll (7. ábra):

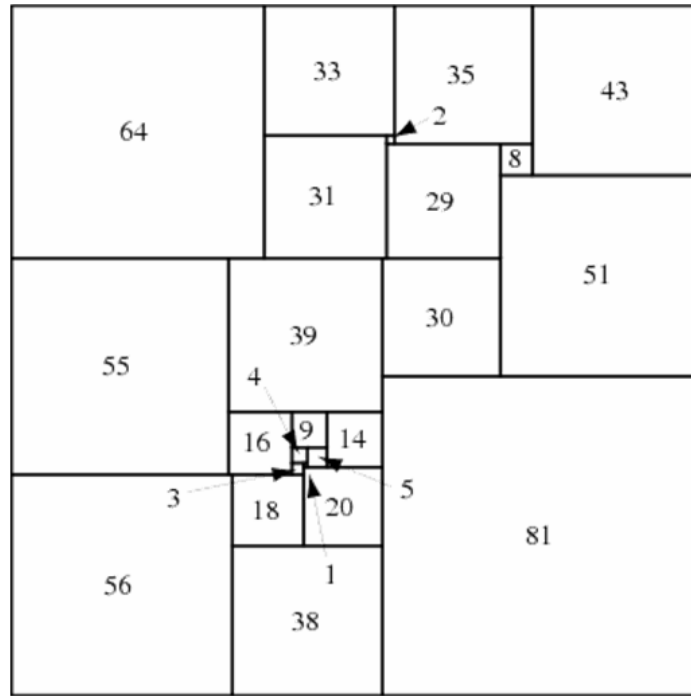
$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 11^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 24^2 + 25^2 + 27^2 + 29^2 + 33^2 + 35^2 + 37^2 + 42^2 + 50^2 = 112^2. \quad (6)$$



7. ábra: Duijvestijn 112x112-es megoldása

Willcocks 24 négyzetből álló összetett perfekt négyzetelt négyzete is ismert (8. ábra). Az ábrán jól látható, hogy mitől összetett Willcocks perfekt négyzetelt négyzete, hiszen a bal alsó sarokban található 13 darab kis négyzet pont egy téglalapot alkot.

A kérdéskörnek kiterjedt irodalma van. Az olvasónak a dolgozat végén megtalálható hivatkozásokat ajánljuk. Az interneten való tájékozódáshoz ifjabb Ed Pegg honlapját javasoljuk kiindulásul [28].



8. ábra: Willcocks 24 négyzetből álló összetett perfekt négyzetelt négyzete (Willcocks 1951).

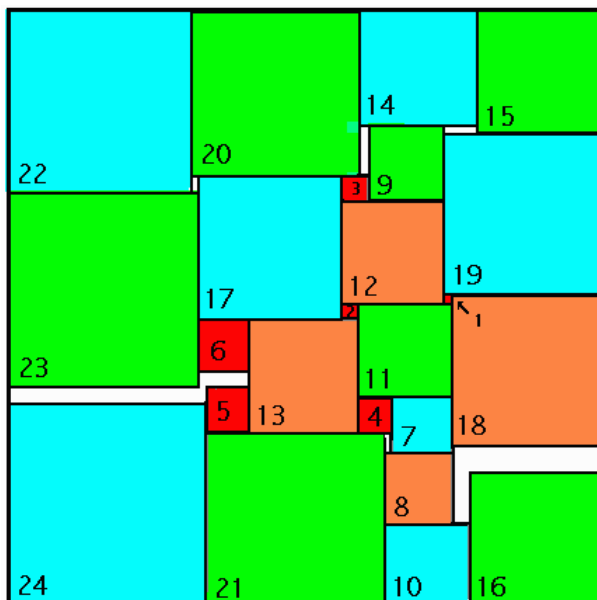
Térjünk vissza az első 24 négyzetszámhoz. Gardner 1966-ban megkérdezte, hogy összerakható-e ezekből egy 70x70-es négyzet (Gardner 1966).

A múlt században kevesen tettek annyit a tudomány közkinccsé tételéért, mint Martin Gardner, a „játékmester”. Nevét a *Scientific American*ben vezetett rovata, a *Mathematical Games* (Matematikai játékok) tette világszerte ismertté. Itt az első írása 1956 decemberében, az utolsó 1981 végén jelent meg. Gardner lenyűgöző feladatvállalása – a Matematikai játékok rovat – megszámlálhatatlanul sok gondolkodó emberre volt hatással. Generációk nőttek fel Martin Gardner írásain, sokan kizárólag miatta fizettek elő a folyóíratra.

Vegyünk egy 1x1-es négyzetet, egy 2x2-es négyzetet, és így tovább egészen egy 24x24-es négyzetig, ezen négyzetek területének összege  $4900$ , ami  $70^2$ . Ez az egyetlen nemtriviális összege a teljes négyzeteknek az egytől kezdődően, ami szintén egy perfekt négyzet lesz (Watson 1918). Bitner és Reingold bebizonyították egy számítógépes program segítségével, hogy ezen 24 négyzetet nem lehet mind bepakolni egy 70x70-es négyzetbe átfedés nélkül (Bitner & Reingold 1975). 1966 szeptemberében a *Scientific American*ben a *Mathematical Games* (Matematikai játékok) rovatában, Martin Gardner megkérdezte az olvasóit, hogy mi az a legnagyobb területe a 70x70-es négyzetnek, amit le tudnak fedni ezen négyzetekkel. Magát a problémát Richard B. Britton-nak tulajdonította. Huszonhét olvasó kezdetleges módszerekkel jutott el oda, hogy 49 négyzetegység marad lefedetlen, miután a 7x7-es négyzetet kihagyják. Korf bizonyította be először, hogy ez a megoldás az optimum (Korf 2004).

Mullin 1978-ban belátta, hogy ha egy négyzet kisebb, egymástól különböző négyzetekből van összerakva, akkor az összetevő négyzetek oldalhosszúságai nem alkothatnak számtani sorozatot (Mullin 1978). Következésképpen a legkisebb négyzet, mely tartalmazhatja a fent említett 24 darab négyzetet, legalább 71x71-es méretű. Hujter Mihály a matematika tudományok kandidátusa

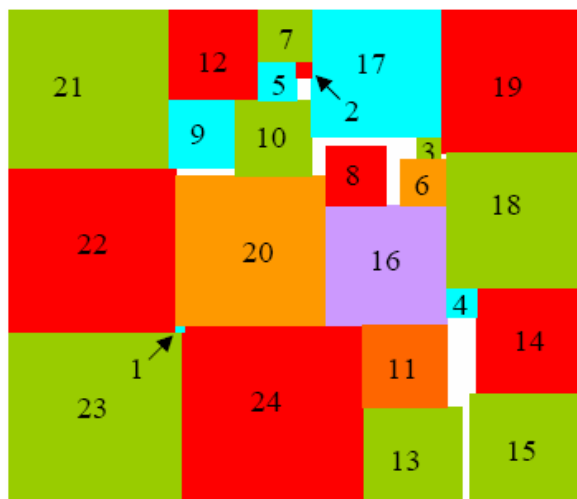
már 1992-ben közölt egy megoldást (Hujter 1992) a  $71 \times 71$ -es négyzetbe való pakolásra (9. ábra). 2002-ben újra publikálásra került a konstrukció (Hujter 2002) és kiegészült azzal a kérdéssel, hogy vajon  $70 \times 71$ -es téglalapba is elhelyezhetők-e a négyzetek? (Később ez a kérdés a dolgozat második fejezetében általunk megválaszolásra került).



9. ábra: Hujter  $71 \times 71$ -es megoldása

Az már akkor is ismert volt, hogy a  $70 \times 72$ -es téglalapba elhelyezhetők a négyzetek. Bár erről Hujter honlapján is csak utalásokat találunk [17], konkrét megoldást nem! Érdekesség, hogy 72 egy négyzetszám fele és  $70 \times 72 = 5040 = 7!$ , és ismeretes az is, hogy Platón milyen nagy tisztelettel volt az 5040-es szám iránt (Platón szerint az ideális város lakossága 5040 kell, hogy legyen). Ugyanakkor  $70 \times 71 = 4970$  éppen a hetvenedik háromszög szám kétszerese. (A teljes négyzetek rokonai a háromszög számok. Az  $n$ -edik háromszög szám definíció szerint 1-től  $n$ -ig az egész számok összege, azaz  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ .)

Julius Czap (Czap Gyula) a kassai P. J. Safarika Egyetem Matematikai Tudományok Intézetének tanárától elektronikus levélben kétféle megoldás is érkezett 2008-ban, amelyek mindegyike 5040-nél kisebb területű téglalapba foglalja be a 24 négyzetet. Az egyik egy  $65 \times 77$ -es téglalap, amelyben a veszteség már nem 140 egység, hanem csak  $65 \times 77 - 70^2 = 105$ .

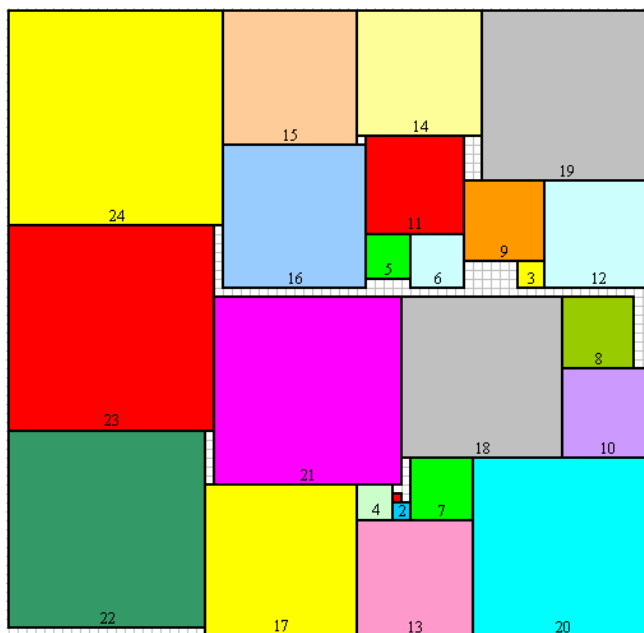


10. ábra: Czap 65x77-es megoldása [8]

Nekünk azonban sikerült ennél is jobb megoldásra lelni: egy 69x72-es téglalap, amelynek a vesztesége csak  $69 \times 72 - 70^2 = 68$  négyzetegység. Kevesebb, mint ami a 70x71-es téglalapé lenne, ha ismernénk a szakirodalomban egyáltalán olyan megoldást.

## EREDMÉNYEINK BEMUTATÁSA

Első alkalommal a Hujter által – a honlapján konkrét eredmény bemutatása nélkül – említett 70x72-es feladatnak láttunk neki, hiszen ennek biztosan kell lennie megoldásának. Milliméterpapíron felvettük a kívánt téglalap méretét és elkezdtük belerajzolni a négyzeteket. A Horváth féle algoritmus működésének megfelelően (Horváth 1991) mi is először a nagyobb területűeket helyeztük el a téglalapban, majd szép sorjában a kisebbekkel folytattuk, míg végül el nem fogyott mind (**anyag és módszer**). Persze nem sikerült mindjárt az első alkalommal elhelyezni az összes négyzetet, de többszöri próbálkozás után rátaláltunk egy helyes megoldásra (11. ábra).



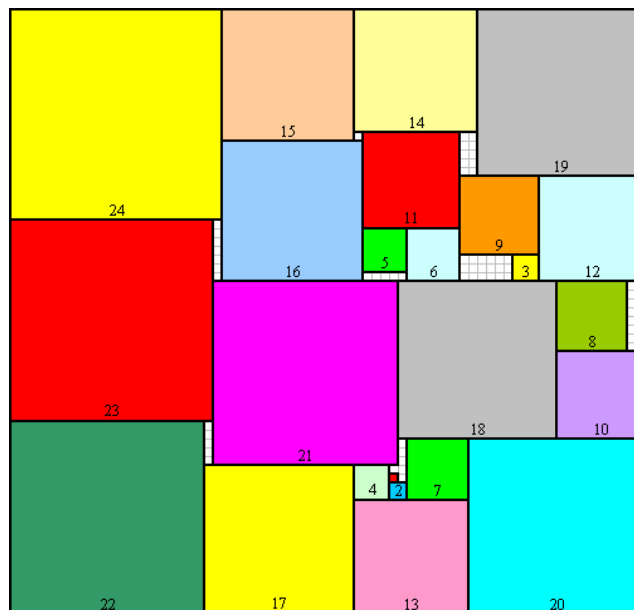
11. ábra: A 70x72-es megoldás

Ha egy kicsit jobban szemügyre vesszük ezen az ábrán látható eredményünket látható, hogy csekély módosítással egy  $69 \times 72$ -es megoldást is lehet képezni belőle [23]. Mégpedig úgy, hogy az ábra jobb alsó részén elhelyezkedő négyzeteket egyszerűen feljebb csúsztatjuk, aminek következménye, hogy az alsó sor nem kerül lefedésre, tehát a sorok számát eggyel lehet csökkenteni, azaz egy  $69 \times 72$ -es megoldást képezni (12. ábra).

*Definíció:* Az  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , ...,  $24 \times 24$  négyzetek egy téglalapba való elhelyezése akkor PRIMA, ha a téglalap bármely oldalát csökkentve már nincs lefedés nélküli elhelyezés.

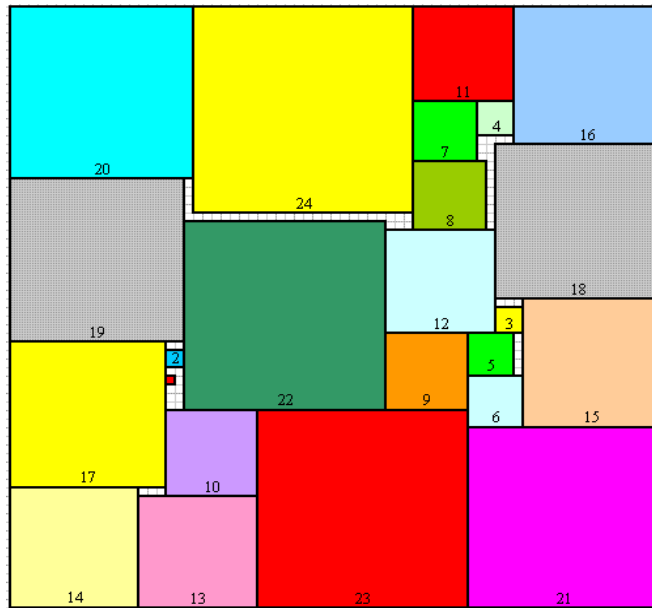
Könnyen belátható, hogy a  $69 \times 72$ -es elhelyezés PRIMA megoldás, hiszen a  $69 \times 71$ -es és a  $68 \times 72$ -es téglalap területe is kisebb, mint 4900!

A megoldás azért is meglepő, mert kettő egységgel meg tudtuk javítani a Hujter által vélt optimumot. Ezzel már be is bizonyítottuk, hogy a  $70 \times 71$ -es megoldás nem lehet a legjobb. Bár még azt se tudjuk, hogy létezik-e erre az esetre kézzel fogható megoldás. A téglalapunk területe  $69 \times 72 = 4968$ , a lefedetlen terület 68 egység, míg a  $70 \times 71$ -es téglalap területe 4970 négyzetegység. Tehát továbbra is nyitott marad a kérdés: van-e  $70 \times 71$ -es megoldás, vagy ha nincs, akkor van-e a mienknél is jobb pl.:  $68 \times 73$ -as megoldás?



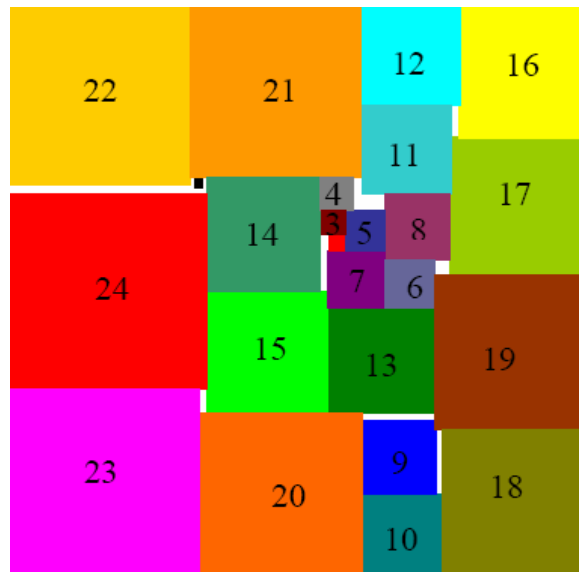
12. ábra: A  $69 \times 72$ -es megoldás

Magától adódott a feladat tudunk-e találni egy  $70 \times 71$ -es eredményt, vagy tudjuk-e bizonyítani, hogy ilyen megoldás nem létezik? Többnapos próbálgatás után jelen dolgozat második szerzőjének [23] sikerült végre belerajzolnia a 24 darab kis négyzetet a közel négyzet alakú téglalapba (13. ábra).



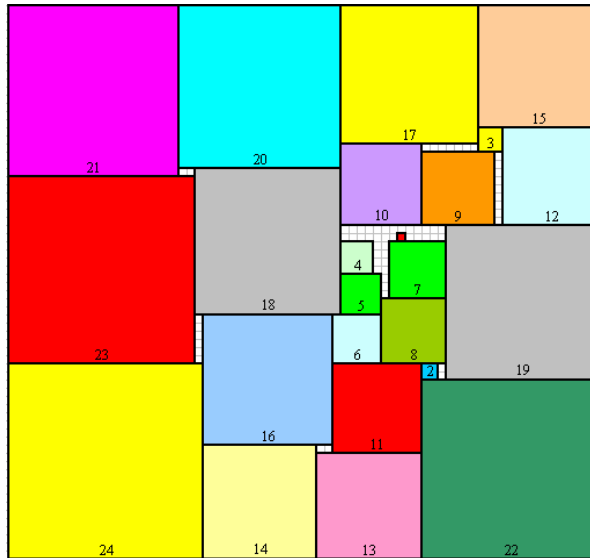
13. ábra: A 70x71-es megoldás

Két héttel később Czap Gyulától is érkezett egy megoldás a 70x71-es téglalapba történő pakolásra (14. ábra). Jól látható, hogy a két elhelyezés teljesen különbözik egymástól, ami felveti a következő kérdést: vajon egy adott téglalaphoz (jelen esetben a 70x71-eshez) hány különböző megoldás létezik?



14. ábra: Czap 70x71-es megoldása [8]

Ezután felmerült az újabb kérdés: meg lehet-e csinálni a 68x73-as feladatot. A válasz a 15. ábrán látható:

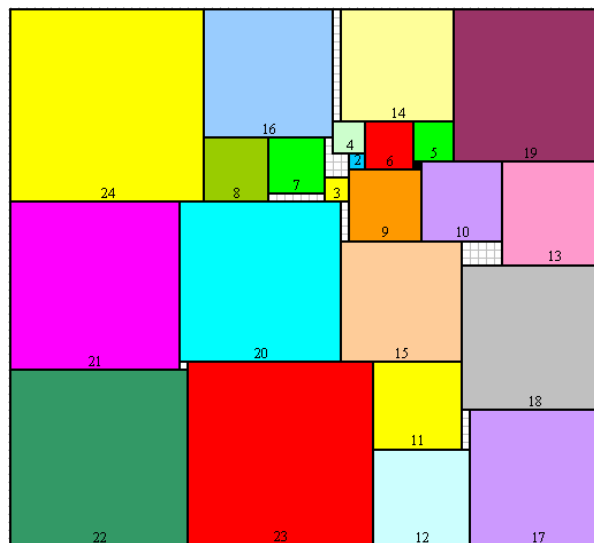


15. ábra: A 68x73-es megoldás

A megoldás azért is ragyogó, mert még tovább tudtuk javítani az előző  $69 \times 72 = 4968$  esetet, ráadásul mindjárt négy egységgel ( $68 \times 73 = 4964$ ). Ezeknél a feladatoknál akár egy négyzetnek is nagy jelentősége lehet és a minimálisnak tűnő javulás is igen nagy eredménynek számít [24].

Nyilvánvalóan, ha tovább szeretnénk csökkenteni a befoglaló téglalap területét, továbbra is azt az eljárást célszerű folytatni, hogy a kisebbik oldalt eggyel csökkentjük, míg a nagyobbikat eggyel növeljük, azaz adódik a következő kérdés: létezik-e  $67 \times 74$ -es megoldás, vagy  $66 \times 75$ -ös, és így tovább?

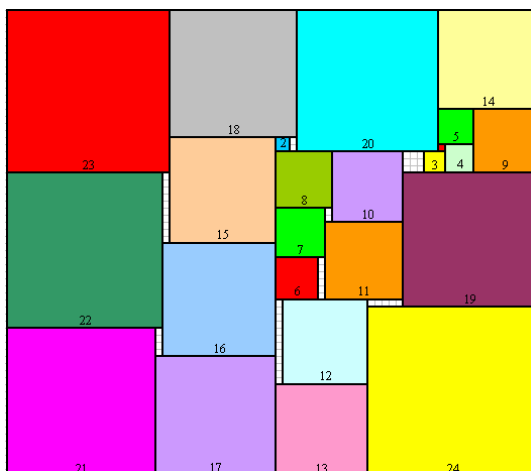
A kérdés első felére ismét igen a válaszuk, hiszen a következő ábrán bemutatjuk ezt az elhelyezést is. A  $67 \times 74$ -es megoldással (16. ábra) még tovább tudtuk javítani az előző eredményt ( $4964$ ), ráadásul újabb hat egységgel ( $67 \times 74 = 4958$ ).



16. ábra: A 67x74-es megoldás

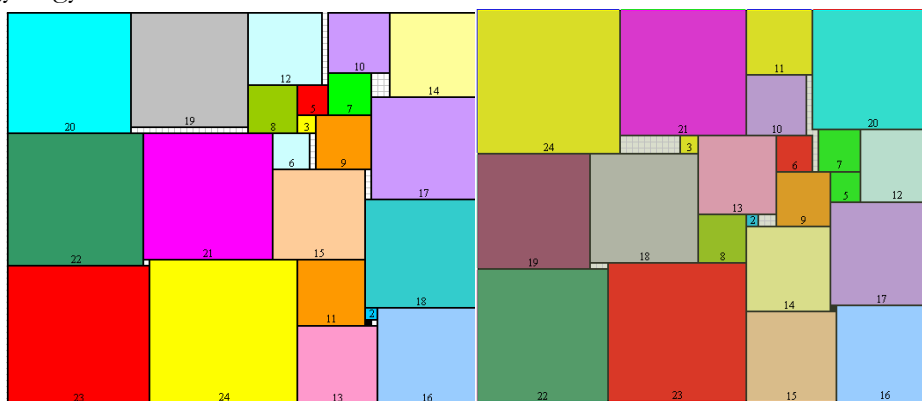
Jelen dolgozat második szerzőjének további kísérletezgetéseit siker koronázta a  $66 \times 75$ -ös téglalap esetében is [24]. Ezen megoldást a 17. ábra segítségével szeretnénk bemutatni. Jelen

esetben ( $66 \times 75 = 4950$ ) újabb 8 egységgel tudtuk csökkenteni a befoglaló téglalap területét, ami már közel két százalékos javulás (összességében pedig már pontosan 91 egységnyi) Hujter 71x71-es megoldásához képest.



17. ábra: A 66x75-ös megoldás

A következő ábrákkal is azt szeretnénk szemléltetni, hogy milyen nehéz is volt egy-egy megoldást megtalálni, a 18. ábra esetében pl.: a  $65 \times 76$ -öst. Az ábra mindkét felén jól látható, hogy már csak a  $4 \times 4$ -es négyzetet nem sikerült elhelyezni a befoglaló téglalapba. Számos olyan félig sikeres próbálkozásunk van, amelyekkel nagyon közel jártunk a helyes pakoláshoz, de sajnós ezeket az eredményeket nem biztos, hogy fel tudjuk használni egy későbbi helyes megoldás megtalálásához, hiszen sok esetben teljesen át kellett rendezni a négyzeteket ahhoz, hogy mind átfedés nélkül beleférjen az adott téglalapba. Előfordult az is (ahogy a 18. ábrán is jól látszik), hogy egy adott téglalap esetén több olyan „majdnem” megoldásra találtunk, amelyek során csak egyetlen egy négyzet marad ki.

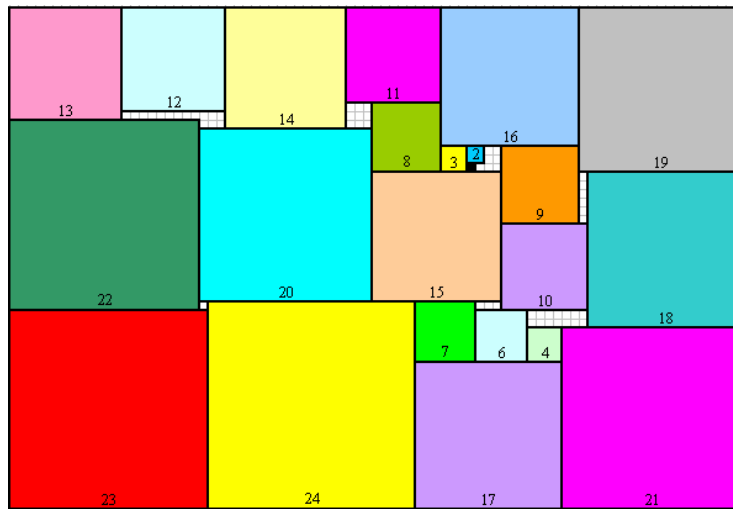


18. ábra: Majdnem  $65 \times 76$ -os megoldások

Jól látható, hogy a négyzetek elrendezése teljesen máshogy alakult a két téglalap esetén. Az is megállapítható, hogy mindkét téglalapról a  $4 \times 4$ -es négyzet hiányzik, illetve mindkettőnél a  $4 \times 4$ -es négyzet egyik oldala nem fér bele a befoglaló téglalapba. Az ilyen „majdnem” megoldásokat újból is megvizsgáljuk és próbálunk rálelni a helyes eredményre, vagy igyekszünk bizonyítani, hogy nem is létezik ezen téglalapok esetén konkrét pakolás. Ilyenkor persze felmerül a kérdés, ha valóban nem lehet minden négyzetet elhelyezni a kívánt méretű téglalapba átfedés nélkül, akkor mi az a legnagyobb területe, amit le lehet fedni ezen négyzetek segítségével?



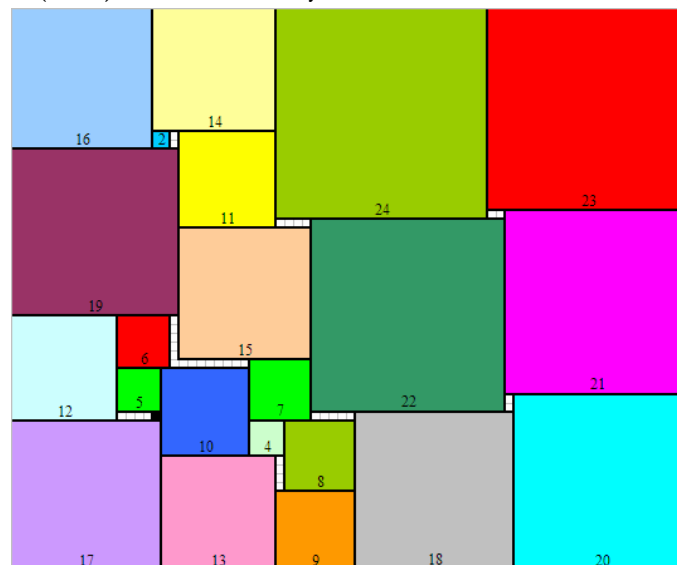
A 41x120-as téglalap esetében van egy olyan eredményünk, amikor szintén egyetlen egy négyzet hiányzik (a 4x4-es) a végső megoldáshoz. Az 58x85-ös téglalap esetén az 5x5-ös négyzetet nem sikerült elhelyeznünk, illetve a 64x77-es téglalap esetén a 3x3-as négyzet maradt ki a befoglaló téglalapról.



19. ábra: Az 58x85-ös részmegoldás

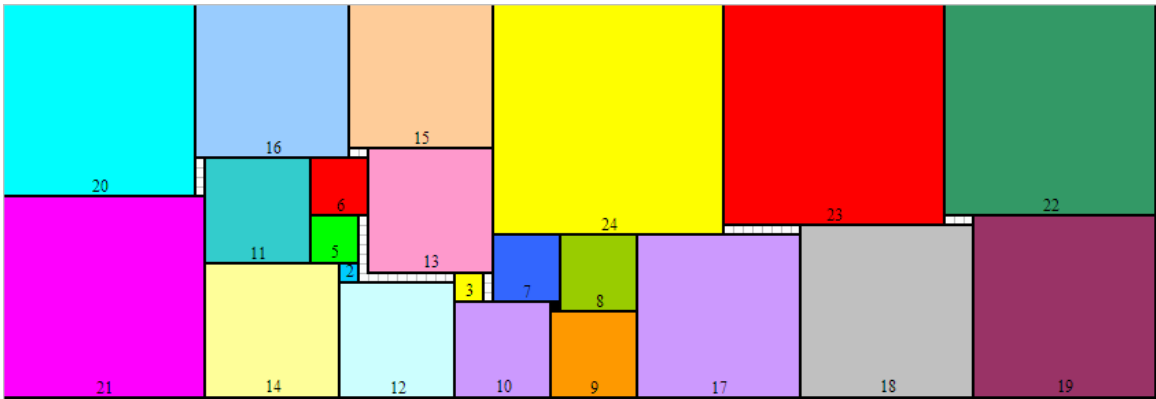
A 19. ábrán bemutatott 58x85-ös téglalap területe 4930 négyzetegység, ami az eddigi legjobb eredményünknél 20 egységgel jobb, de sajnos az 5x5-ös négyzet elhelyezése hiányzik, így nem tekinthető jó megoldásnak. Ez a téglalap mindössze két egységgel nagyobb csak Korf 56x88-as megoldásánál.

A 20. ábrán látható a 64x77-es téglalap, amelynek területe megegyezik az előbb említett Korf féle téglalap területével (4928). Ebből az elhelyezésből már csak a 3x3-as négyzet maradt ki.



20. ábra: Majdnem 64x77-es megoldás

És végül a 41x120-as téglalap részeredményét szeretnénk bemutatni. Ez az a téglalap, amelynek területe mindössze 4920 egység, tehát 8 egységgel jobb, mint az 56x88-as optimum. Ezen téglalap helyes pakolását még senki nem tudta megoldani. Mi sem, hiszen a 4x4-es négyzet kimaradt.



21. ábra: A 41x120-as téglalap részmegoldása

Hatalmas mennyiségű számítógép-teljesítményt bevetve Korf 2004-ben újra felfedezte, hogy 71x71-es a legkisebb tartalmazó négyzet (1. táblázat). Ugyanakkor megtalálta a legkisebb területű téglalapot is: 56x88-as (22. ábra), melynek a vesztesége mindössze  $56 \times 88 - 70^2 = 28$  (Korf 2004). Már megint a tökéletes 28-as! Korf jelentése szerint a számítógépprogramjának 68.308.619.567 esetet kellett megvizsgálnia (2. táblázat).

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
3	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	47	50	54	58	62	66	71	75

1. táblázat: A legkisebb négyzetek, melyek tartalmazzák az 1x1-es, ..., nxn-es négyzeteket

Az 1. táblázatban a legkisebb négyzeteket olvashatjuk ki, amelyek tartalmazzák az 1x1-es, 2x2-es, ..., nxn-es négyzeteket átfedés nélkül.

Size	Optimal	Waste	Implementation
N	Solution	Percent	Nodes
1	1 × 1	0%	1
2	2 × 3	16.67%	2
3	3 × 5	6.67%	3
4	5 × 7	14.29%	8
5	5 × 12	8.33%	5
6	9 × 11	8.08%	18
7	7 × 22	9.09%	32
7	11 × 14	9.09%	32
8	14 × 15	2.86%	104
9	15 × 20	5.00%	206
10	15 × 27	4.94%	1023
11	19 × 27	1.36%	805
12	23 × 29	2.55%	8629
13	22 × 38	2.03%	24115
14	23 × 45	1.93%	61481
15	23 × 55	1.98%	393395
16	27 × 56	1.06%	649800
16	28 × 54	1.06%	649800
17	39 × 46	0.50%	3246060
18	31 × 69	1.40%	14969573
19	47 × 53	0.84%	85756403
20	34 × 85	0.69%	157034645
21	38 × 85	0.99%	848442675
22	39 × 98	0.71%	3415889278
23	64 × 68	0.64%	15647354137
24	56 × 88	0.57%	68308619567
25	43 × 129	0.40%	158590367061

2. táblázat: Legkisebb területű téglalapok, melyek tartalmazzák az 1x1, ..., nxn-es négyzeteket

A 2. táblázatban a legkisebb területű téglalapokat láthatjuk, amelyek tartalmazzák az 1x1-es, 2x2-es, ..., nxn-es négyzeteket, valamint az eredmények területveszteségét százalékban (tehát azt a területet, ami lefedetlen lesz), illetve a program implementációinak számát.

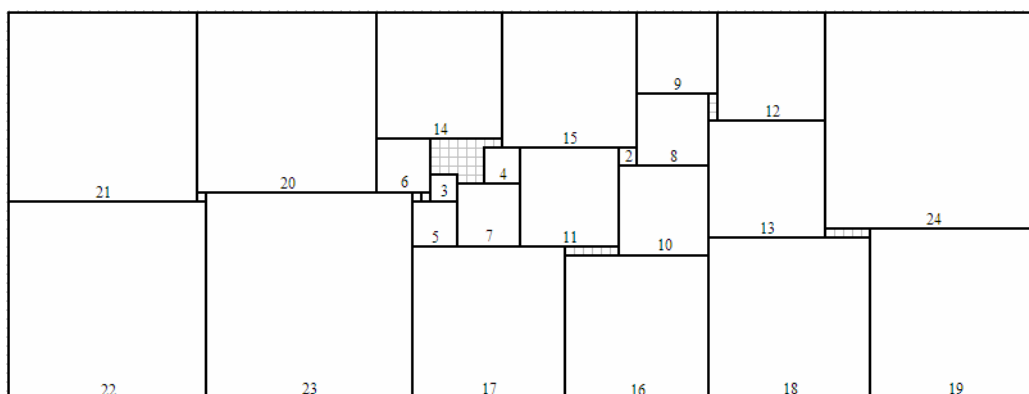


22. ábra: Korf 56x88-as elhelyezése

Az 56x88-as megoldás pontosan 16:09:59:25 futási idejébe telt az új algoritmusnak (Korf 2003) egy 1,8 GHz-es (gigahertz) PC-n, ami 16 napnak 9 órának 59 percnek és 25 másodpercnek felel meg.

Igaz ugyan, hogy Korf vesztesége lényegesen kevesebb, mint a miénk, de a 69x72-es téglalap jobban hasonlít a 70x70-es négyzetre, mint az 56x88-os téglalap.

Végül szeretnénk bemutatni az eddigi legkisebb tartalmazó téglalapunkat, melyet szintén a dolgozat második szerzője készített (23. ábra). Ezen esetben  $(43 \times 115 = 4945)$  újabb 5 egységgel tudtuk csökkenteni a befoglaló téglalap területét, bár látható hogy az alakzat már kezd ellaposodni [25].



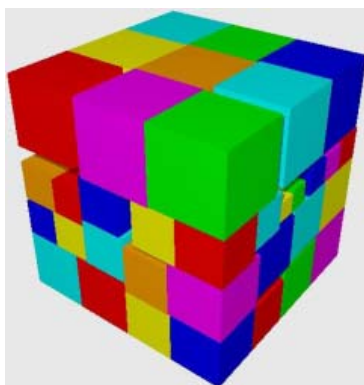
23. ábra: A 43x115-ös megoldás

Továbbra is nyitott marad a kérdés azonban, hogyan lehetne bizonyítani, hogy Korf megoldása tényleg a legjobb, vagy létezik-e még ennél is jobb pakolás? Azt azért lehet látni, hogy a téglalap nem lehet nagyon lapos!

Továbbá utána kéne gondolni, hogy van-e  $65 \times 76$ -es megoldás, vagy ha nincs, akkor van-e  $64 \times 77$ -es megoldás, vagy nincs, és így tovább. Illetve fel lehetne tární egy adott téglalaphoz – pl.: a  $70 \times 71$ -hez – az össze lehetséges pakolási megoldást.

Természetesen, ha valamelyik pakolás bizonyítottan nem létezik, akkor azt kellene megvizsgálni, hogy mi az a legnagyobb területe az adott téglalaphoz, amit le lehet fedni ezen négyzetek felhasználásával?

És érdemes elgondolkozni a feladat háromdimenziós esetén is, tehát amikor egy bizonyos kockába (téglatestbe) szeretnénk elhelyezni egy  $1 \times 1 \times 1$ -es, egy  $2 \times 2 \times 2$ -es, ...,  $n \times n \times n$ -es kis kockát (24. ábra).



24. ábra: Az 1-69 élű kiskockák elhelyezése egy 186 élű nagy kockában

## ÖSSZEFOGLALÁS

Hazánkban többek közt Csirik János, Dósa György, Galambos Gábor, Imreh Csanád, Iványi Antal, Vizvári Béla értek el eredményeket a téglalapok sűrű pakolásainak területén. Számos izgalmas kérdés azonban még felderítetlen maradt. A dolgozat készítőiként feladatul tűztük ki egyrészt áttekinteni a kutatási ág jelenlegi helyzetét, másrészt alaposan megtárgyalni egy napjainkban is vizsgált részterületen egy-két speciális kérdést megfelelő táblázatokkal és színes ábrákkal szemléltetve. Jelen dolgozat keretei között vizsgált feladat azonban csak egy aprócska területe napjaink logisztikai problémáinak.

**Következtetésül** büszkén írhatjuk le, hogy munkánk során megalkottuk az  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , ...,  $24 \times 24$ -es négyzeteknek a  $70 \times 71$ -es méretű téglalaphoz történő pakolását, amivel bizonyítottuk a szakirodalomban is nyitott kérdésként kezelt probléma megoldásának létezését. Ráadásul ezen megoldás már egyúttal PRIMA megoldás is, hiszen a befoglaló téglalap egyik oldalát sem lehet tovább csökkenteni, miközben a másikat fixen hagynánk, hiszen ekkor a téglalap területe kisebbre adódna, mint a kis négyzetek összterülete. A téma aktualitását, időszerűségét az adja, hogy napjainkban a logisztikai tevékenységet folytató vállalatok életében egy-egy rakodási terv, illetve egységgrakomány-képzés elkészítése komoly optimalizálási feladatot igényel. Ezen esetekben többféle célfüggvény is megvalósítható pl.: az egységgrakomány-képző eszköz térkitöltése maximális legyen.

Továbbá megoldottuk a 69x72-es, a 68x73-as, a 67x74-es, illetve a 66x75-ös téglalapba történő pakolásokat is, mely eredmények mindegyikével még tovább tudtuk csökkenteni a befoglaló téglalap területét (Nyilvánvalóan ezen megoldások mindegyike is PRIMA megoldás). Az általunk elért legkisebb területű téglalap tehát a 43x115-ös, mely már csak 45 egységgel több ( $43 \times 115 = 4945$ ), mint az elméleti optimum. Ezzel az eredményünkkel ( $5041 - 4945 = 96$ ) 96 egységgel tudtuk csökkenteni a Hujter által vélt optimumot, ami két százalékos javulásnak felel meg.

Valamint megfogalmaztunk néhány a témakörhöz szorosan kapcsolódó kérdést, amelyeket azok számára is **javaslunk**, akik szintén nagy érdeklődéssel foglalkoznak ezzel a problémával.

Dolgozatunk elsődleges célkitűzését – a fent említett feladatok mindegyikéhez egy megoldási változat megtalálását és széleskörű bemutatását – véleményünk szerint maradéktalanul teljesítettük.

Reméljük, hogy a dolgozatban ismertetett témakörrel, annak gyakorlati jelentőségével (nevezetesen az egységgrakomány-képzés és a rakodási tervek elkészítése), bemutatott megoldásainkkal másokat is sikerül elindítanunk a játékos gondolkodás, optimalizálás és cselekvés útján. Mindezek után bízunk abban, hogy törekvéseink elérték céljukat, és a dolgozatban mások számára ugyancsak érdekes ismeretek lelhetők fel.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] BITNER J.—REINGOLD E. M.: Backtrack programming techniques. Communications of the ACM, vol. **26**, 1975. 832–843. o.
- [2] BOUWKAMP C. J.—DUIJVESTIJN A. J. W.—MEDEMA P.: Catalogue of simple squared rectangles of orders nine through fourteen and their elements. Dept. Math. Techn. Hogeschool, Eindhoven, The Netherlands 1960.
- [3] BOUWKAMP C. J.: On the dissection of rectangles into squares I. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **49**, 1946. 724–736. o. = Indag. Math. **8**, 1946. 1176–1188. o.
- [4] BROOKS R. L.—SMITH C. A. B.—STONE A. H.—TUTTE W. T.: The dissection of rectangles into squares. Duke Math. J. **7**, 1940. 312–340. o.
- [5] CHIN F. Y. L.: Packing squares into a square, J. Parallel and Distributed Computing **10**, 1990. 271–275. o.
- [6] CONWAY J. H.: Mrs. Perkins's quilt. Proc. Cambridge Philos. Soc. **60**, 1964. 363–368. o.
- [7] CSELÉNYI J.—ILLÉS B.: Logisztikai rendszerek I., Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 2006.
- [8] CZAP J.: E-mail üzenetek, 2008.
- [9] DEHN M.: Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Annalen **57**, 1903. 314–332. o.
- [10] DUDENEY H. E.: Amusements in mathematics. New York: Dover, 1917. Reprinted Mineola, NY: Dover, 1958.
- [11] DUJVESTIJN A. J. W.: Simple perfect square of lowest order, J Comb. Theory Ser. B **25**, 1978. 240–243. o.
- [12] GARDNER M.: Mathematical Games: The problem of Mrs. Perkins' quilt, and answers to last month's puzzles. Scientific American Magazine **215**, 1966. 264–272. o.

- [13] GARDNER M.: The problem of Mrs. Perkin's quilt and other square-packing problems. In *Mathematical Carnival*. New York: Alfred A. Knopf, 1975. 139–149. o.
- [14] HORVÁTH G.: Perfekt négyzetelt téglalapok és négyzetek. Szakdolgozat a matematikus diploma elnyeréséért, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 1991. [témavezető: Hujter M.]
- [15] HUJTER M.: Combinatorial optimization problems related to geometric packings and coverings. Kandidátusi értekezés, Magyar Tudományos Akadémia, 1992. Budapest.
- [16] HUJTER M.: Improving a lower bound for online strip packing with modifiable boxes. *Proc. microCAD Internat. Sci. Conf. 2002*. Miskolc-Egyetemváros, Hungary, vol. D: Basic Engineering Sciences (Eds.: Lehoczky, L., and Kalmár, L.) 1–5. o.
- [17] HUJTER M.: Put 24 noncongruent squares into the least-area-rectangle. A part of a homepage, 2002. <http://math.bme.hu/~hujter/further.htm>
- [18] HUJTER M.—OLÁH B.: *Négyzetekre bontás – új megoldások régi problémákra*. Haladvány Kiadvány – magyar nyelvű digitális folyóirat, matematika, tudománytörténet, nyelvtörténet, kapcsolódó humor, 2008.10.17. 12 o. (<http://math.bme.hu/~hujter/081017.pdf>)
- [19] KEREPESZKI I. (Szerk.): *Áruszállítás és csomagolás logisztikája* (főiskolai jegyzet), TSF MFK Mezőtúr, 2001.
- [20] KORF R.: A new algorithm for optimal bin packing. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-02)*. Edmonton, Alberta, Canada: AAAI Press, 2001. 731–736. o.
- [21] KORF R.: Optimal rectangle packing: initial results. In *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Automated Planning and Scheduling. ICAPS, 2003*. 287–295. o.
- [22] KORF R.: Optimal rectangle packing: new results. In *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Automated Planning and Scheduling. ICAPS, 2004*. 142–149. o.
- [23] MÉSZÁROS A. É.: Új eredmények négyzetek téglalapba pakolására. TDK dolgozat, Szolnoki Főiskola Műszaki és Mezőgazdasági Fakultás, Mezőtúr, 2008. 18 o. [konzulens: Oláh B.]
- [24] MÉSZÁROS A. É.: Új eredmények négyzetek téglalapba helyezésére. OTDK dolgozat, Agrártudományi szekció, Agrár-műszaki tagozat, Szent István Egyetem, Mezőgazdaság- és Környezettudományi Kar, Gödöllő, 2009. 36 o. [konzulens: Oláh B.]
- [25] MÉSZÁROS A. É.—OLÁH B.: *Négyzetek téglalapba pakolásának új eredményei*. Műszaki Tudomány az Észak-Alföldi Régióban 2009, ISBN 978-963-7064-21-0, Mezőtúr, elektronikus Műszaki Füzetek VII. Szerkesztette: Pokorádi László, Kiadja: Debreceni Akadémiai Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Debrecen, 2009. 155–160. o. ([http://store1.digitalcity.eu.com/store/clients/release/musz\\_fuz\\_07.pdf](http://store1.digitalcity.eu.com/store/clients/release/musz_fuz_07.pdf))
- [26] MORON Z.: Ó rozkladach prostokatów na kwadratý [lengyel; a cím angolul: On the Dissection of a Rectangle into Squares]. *Preglad Mat. Fiz.* **3**, 1925. 152–153. o.
- [27] MULLIN A. A.: On arithmetic aspects of geometric problems. *Amer. Math. Soc. Notices* **25**, 1978. A-227.
- [28] PEGG E. JR.: Square Packing, 2003. [http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames\\_12\\_01\\_03.html](http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_12_01_03.html)
- [29] PREZENSZKI J. (Szerk.): *Logisztika I. (Bevezető fejezetek)*. Logisztikai Fejlesztési Központ, Budapest, 2004.
- [30] SPRAGUE R.: Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate. *Math. Z.* **45**, 1939. 607–608. o.

- [31] STEWART I.: Squaring the Square. Scientific American, 1997. 74–76. o.
- [32] TRUSTRUM G. B.: Mrs. Perkins’s quilt. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol. **61**, 1965. 7–11. o.
- [33] TUTTE W.: Squaring the square, Canadian J. Math. **2**, 1950. 197–209. o.
- [34] TUTTE W.: The quest of the perfect square, The American Mathematical Monthly **72**, 1965. 29–35. o.
- [35] WATSON G. N.: The problem of the square pyramid. Messenger **48**, 1918. 1–16. o.
- [36] WILLCOCKS T. H.: A Note on Some Perfect Squared Squares. Canadian J. Math. **3**, 1951. 304–308. o.

### ***NEW RESULTS FOR SQUARE-PACKING INTO RECTANGLE***

The objective of this scientific work is to prove the existence of placing  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , ...,  $24 \times 24$  squares in a  $70 \times 71$  rectangle and find the  $69 \times 72$  solution, or to prove that this kind of take-in rectangle does not exist, furthermore, to find the  $68 \times 73$ ,  $67 \times 74$  and so on solutions. In relation to the preparation of this topic the special problem is the placing of each square in the framing rectangle without the occurrence of overlapping. Moreover, these solutions are at the same time PRIMA solutions, too, since one of the sides of the framing rectangle cannot be reduced further while the other remains fixed, surely then the area of the rectangle becomes smaller than that of the total area of the small squares. Since these cases are open questions in the latest technical literature – or the smallest take-in rectangle in which 24 different squares could be placed without overlapping is not known -, therefore the choice of our topic is timeliness, actuality which there is no doubt about.